Géométrie dérivée et géométrie énumérative

Bertrand Toen

LAREMA - Angers, juin 2025

Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

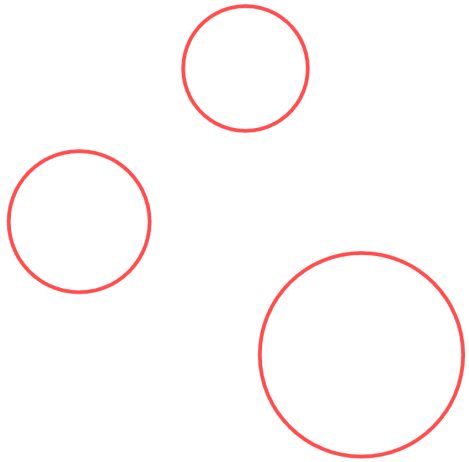
Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

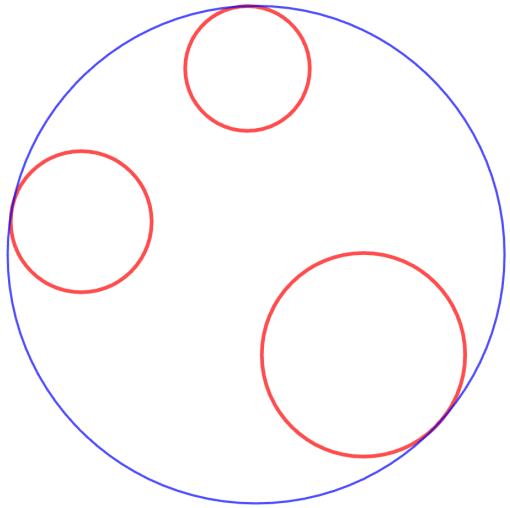


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

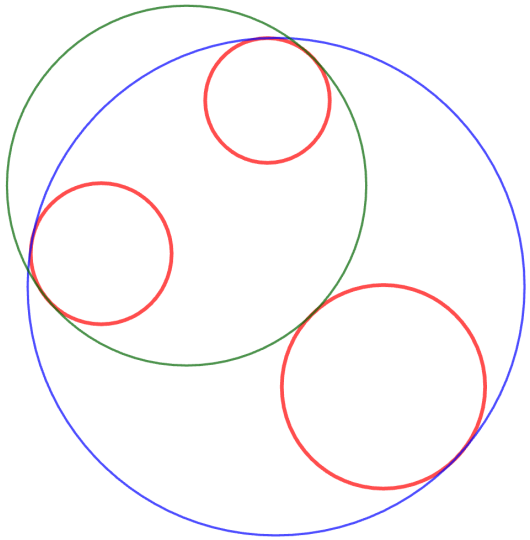


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

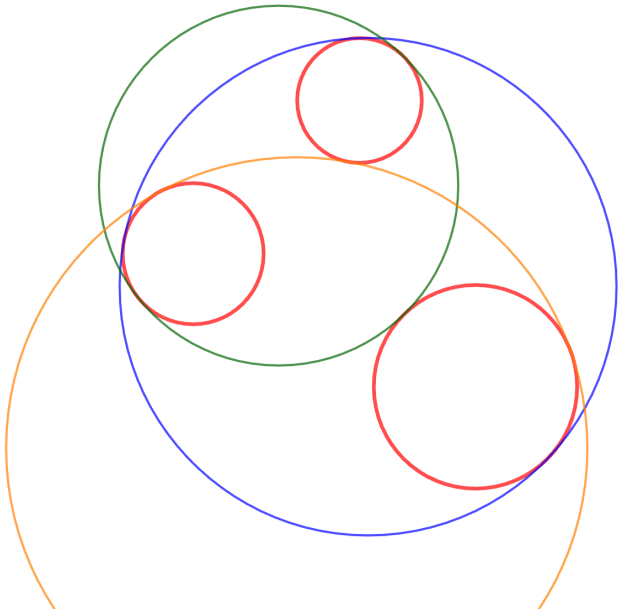


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

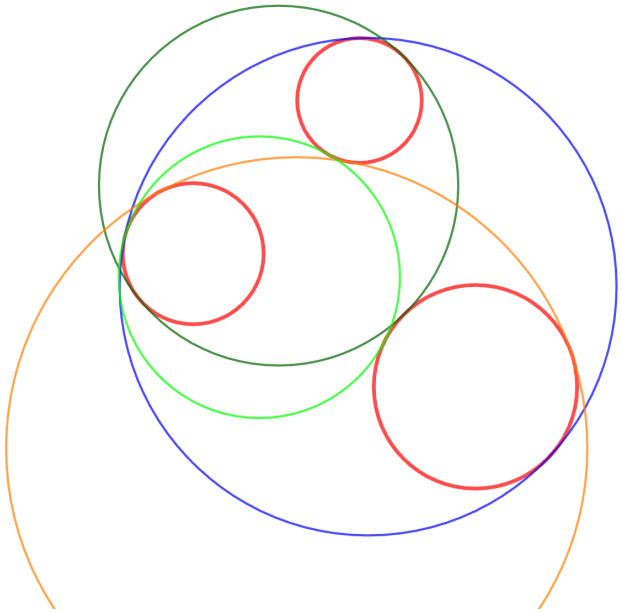


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

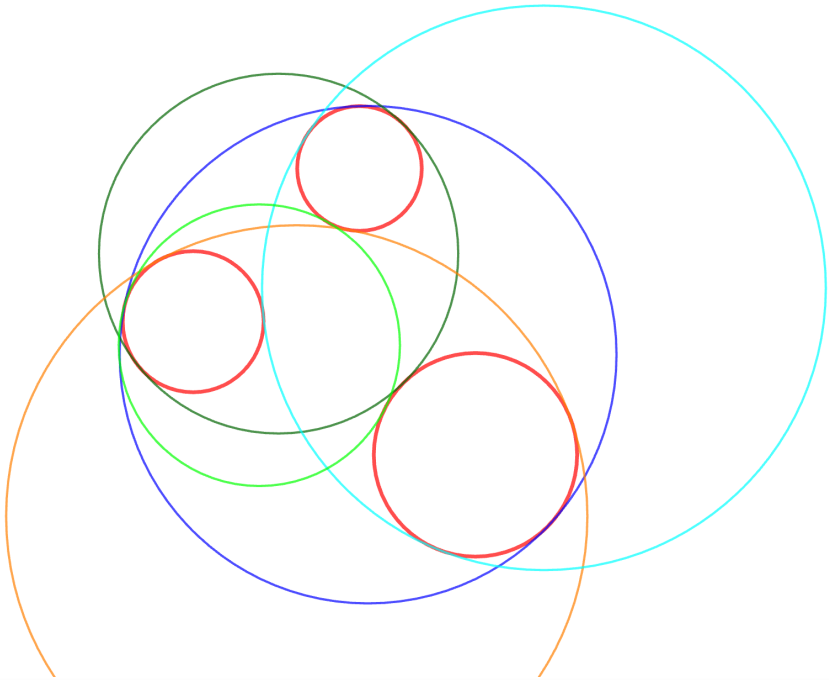


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

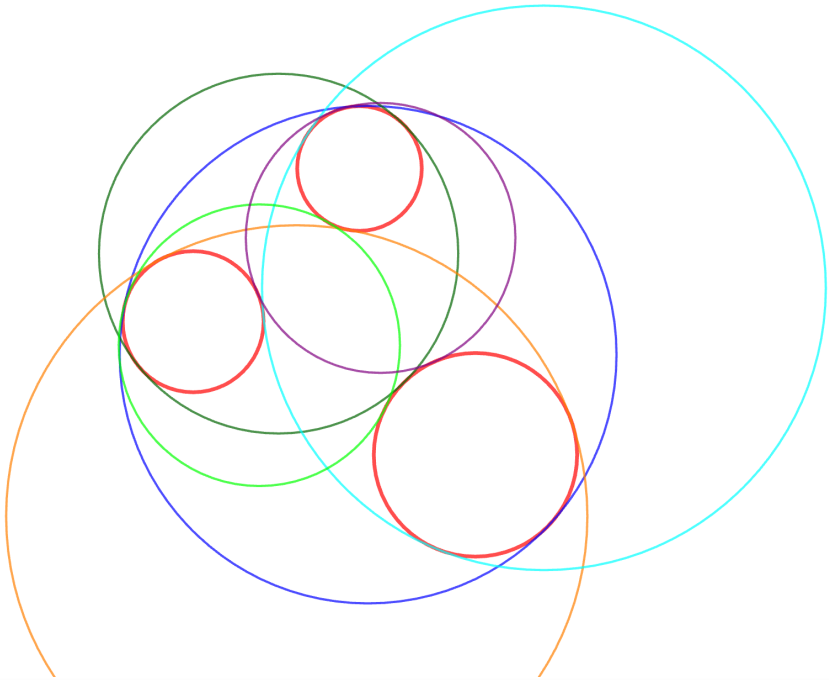


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

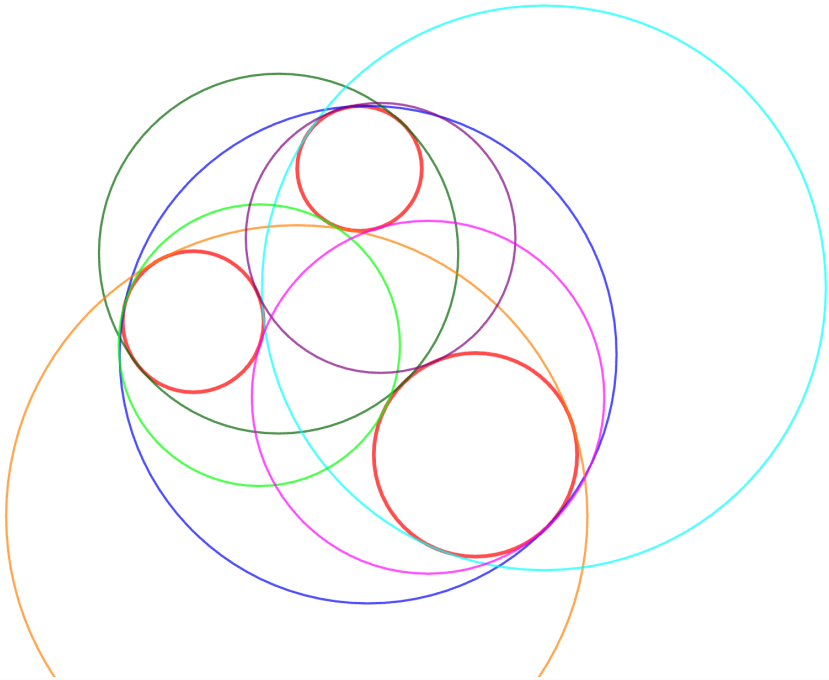


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

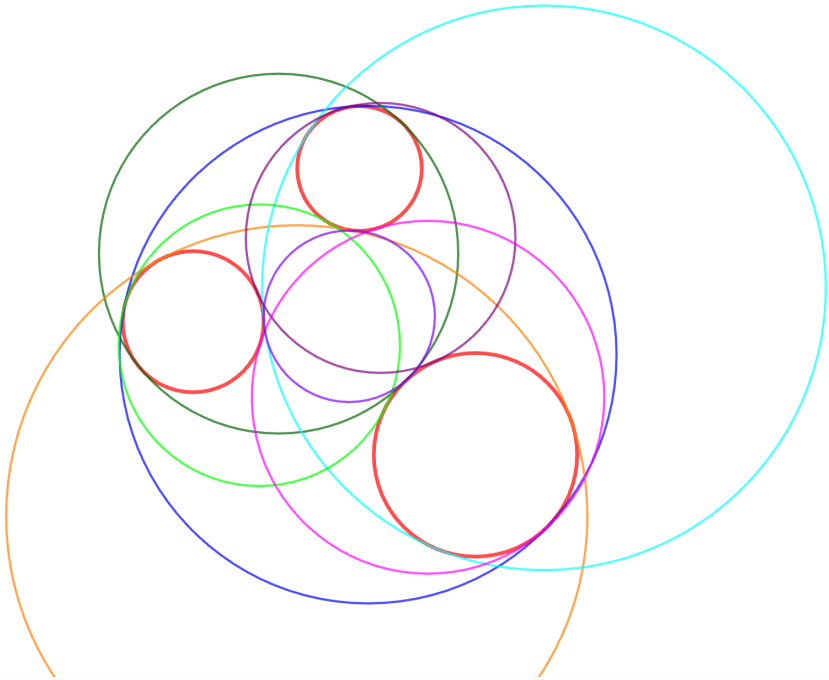


Cercles d'Apollonius

(voir https://marco-robalo.perso.math.cnrs.fr/DTDAG.pdf)

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, en position générale, il existe exactement **huit** *cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*



L'espace des cercles

L'espace des cercles

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$$

L'espace des cercles

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$$

$\mathbb{CP}^2$ est le le plan projectif complexe,

L'espace des cercles

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$$

$\mathbb{CP}^2$ est le le plan projectif complexe, un point de $\mathbb{CP}^2$ est repéré par ses coordonnées homogènes

$$[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 \qquad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{0, 0, 0\}$$

$$([x, y, z] = [x', y', z']) \Longleftrightarrow ((x, y, z) = (\lambda.x', \lambda.y', \lambda.z') \quad \lambda \neq 0)$$

L'espace des cercles

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$$

$\mathbb{CP}^2$ est le le plan projectif complexe, un point de $\mathbb{CP}^2$ est repéré par ses coordonnées homogènes

$$[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 \qquad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{0, 0, 0\}$$

$$([x, y, z] = [x', y', z']) \Longleftrightarrow ((x, y, z) = (\lambda.x', \lambda.y', \lambda.z') \quad \lambda \neq 0)$$

$$\mathbb{C}^2 = \{[x, y, 1]\} \subset \mathbb{CP}^2 \supset \mathbb{CP}^1 = \{[x, y, 0]\}$$

Deux "points cycliques" $[1, \pm i, 0] \in \mathbb{CP}^1$.

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (X - x_0 Z)^2 + (Y - y_0 Z)^2 - r^2 Z^2 = 0$$

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (X - x_0 Z)^2 + (Y - y_0 Z)^2 - r^2 Z^2 = 0$$

Un cercle peut-être dégénéré/singulier:

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (X - x_0 Z)^2 + (Y - y_0 Z)^2 - r^2 Z^2 = 0$$

Un cercle peut-être dégénéré/singulier:

1. Cercle de rayon 0: e.g. $X^2 + Y^2 = 0$. Deux droites (projectives complexes).

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (X - x_0 Z)^2 + (Y - y_0 Z)^2 - r^2 Z^2 = 0$$

Un cercle peut-être dégénéré/singulier:

1. Cercle de rayon 0: e.g. $X^2 + Y^2 = 0$. Deux droites (projectives complexes).
2. Cercle dont le centre est à l'infini: e.g. $ZX = 0$. Deux droites (dont une à l'infini).

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (X - x_0 Z)^2 + (Y - y_0 Z)^2 - r^2 Z^2 = 0$$

Un cercle peut-être dégénéré/singulier:

1. Cercle de rayon 0: e.g. $X^2 + Y^2 = 0$. Deux droites (projectives complexes).
2. Cercle dont le centre est à l'infini: e.g. $ZX = 0$. Deux droites (dont une à l'infini).
3. Droite double à l'infini: $Z^2 = 0$.

L'espace des cercles

Définition

1. *Une conique* $C \subset \mathbb{CP}^2$ *est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré* 2 $P(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eYZ + fXZ$.
2. *Un* **cercle** *est une conique passant par les deux points cycliques:* $a = b$ *et* $d = 0$.

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow (X - x_0 Z)^2 + (Y - y_0 Z)^2 - r^2 Z^2 = 0$$

Un cercle peut-être dégénéré/singulier:

1. Cercle de rayon 0: e.g. $X^2 + Y^2 = 0$. Deux droites (projectives complexes).
2. Cercle dont le centre est à l'infini: e.g. $ZX = 0$. Deux droites (dont une à l'infini).
3. Droite double à l'infini: $Z^2 = 0$.

Inclure des objets singuliers/dégénérés $\Rightarrow$ espaces **compacts**. Crucial si l'on souhaite "compter".

L'espace des cercles

Un cercle $C \subset \mathbb{CP}^2$ est donné par une équation de la forme

$$a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$$

L'espace des cercles

Un cercle $C \subset \mathbb{CP}^2$ est donné par une équation de la forme

$$a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$$

$$\{\text{Cercles C} \subset \mathbb{CP}^2\} \simeq \{[a, c, e, f]\} = \mathbb{CP}^3$$

L'espace des cercles

Un cercle $C \subset \mathbb{CP}^2$ est donné par une équation de la forme

$$a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$$

$$\{\text{Cercles C} \subset \mathbb{CP}^2\} \simeq \{[a, c, e, f]\} = \mathbb{CP}^3$$

L'espace des cercles est un espace **compact**.

L'espace des cercles

Un cercle $C \subset \mathbb{CP}^2$ est donné par une équation de la forme

$$a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$$

$$\{\text{Cercles C} \subset \mathbb{CP}^2\} \simeq \{[a, c, e, f]\} = \mathbb{CP}^3$$

L'espace des cercles est un espace **compact**.

Question: Étant donné un cercle C_0, comprendre le sous-espace $Z_{C_0} \subset \mathbb{CP}^3$ des cercles tangents à C_0.

L'espace des cercles

Un cercle $C \subset \mathbb{CP}^2$ est donné par une équation de la forme

$$a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$$

$$\{\text{Cercles C} \subset \mathbb{CP}^2\} \simeq \{[a, c, e, f]\} = \mathbb{CP}^3$$

L'espace des cercles est un espace **compact**.

Question: Étant donné un cercle C_0, comprendre le sous-espace $Z_{C_0} \subset \mathbb{CP}^3$ des cercles tangents à C_0.

Solution au problème d'Apollonius pour trois cercles C_0, C_1 et C_2: nombre de points d'intersection

$$Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2} \subset \mathbb{CP}^3$$

Espace des cercles tangents à C_0

Exemple: C_0 d'équation $X^2 + Y^2 - hZ^2 = 0$ (centre $(0,0)$ et rayon h^2).
Si C est donné par l'équation $aX^2 + aY^2 + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$, "$C$ est tangent à C_0" s'écrit

$$(2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0$$

Espace des cercles tangents à C_0

Exemple: C_0 d'équation $X^2 + Y^2 - hZ^2 = 0$ (centre $(0,0)$ et rayon h^2).
Si C est donné par l'équation $aX^2 + aY^2 + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$, "$C$ est tangent à C_0" s'écrit

$$(2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0$$

$$Z_{C_0} = \{[a, c, e, f] \,/\, (2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$$

Espace des cercles tangents à C_0

Exemple: C_0 d'équation $X^2 + Y^2 - hZ^2 = 0$ (centre $(0,0)$ et rayon h^2).
Si C est donné par l'équation $aX^2 + aY^2 + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$, "$C$ est tangent à C_0" s'écrit

$$(2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0$$

$$Z_{C_0} = \{[a, c, e, f] \,/\, (2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$$

Z_{C_0} est un cône quadratique:

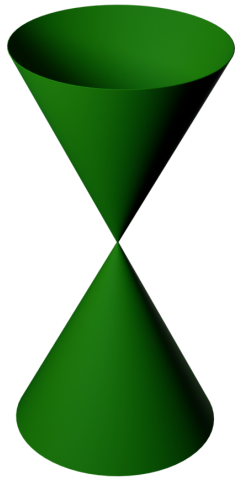
Espace des cercles tangents à C_0

Exemple: C_0 d'équation $X^2 + Y^2 - hZ^2 = 0$ (centre $(0,0)$ et rayon h^2).
Si C est donné par l'équation $aX^2 + aY^2 + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$, "$C$ est tangent à C_0" s'écrit

$$(2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0$$

$$Z_{C_0} = \{[a, c, e, f] \,/\, (2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$$

Z_{C_0} est un cône quadratique:



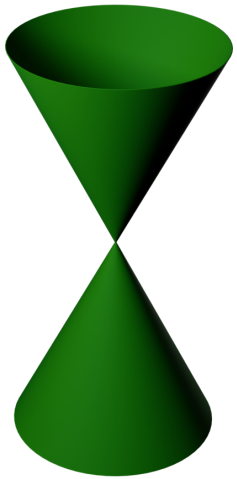
Espace des cercles tangents à C_0

Exemple: C_0 d'équation $X^2 + Y^2 - hZ^2 = 0$ (centre $(0,0)$ et rayon h^2).
Si C est donné par l'équation $aX^2 + aY^2 + cZ^2 + eYZ + fXZ = 0$, "$C$ est tangent à C_0" s'écrit

$$(2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0$$

$$Z_{C_0} = \{[a, c, e, f] \,/\, (2ha - 2c)^2 - he^2 - hf^2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$$

Z_{C_0} est un cône quadratique:



- Sommet: $C = C_0$
- Droite génératrice: centre de C sur une droite fixée passant par le centre de C_0
- Droites tangentes = points à l'infini.

Preuve du théorème d'Apollonius

Pour trois cercles donnés C_0, C_1 et C_2, l'ensemble des cercles tangents aux C_i est

$$Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$$

Preuve du théorème d'Apollonius

Pour trois cercles donnés C_0, C_1 et C_2, l'ensemble des cercles tangents aux C_i est

$$Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$$

Chaque Z_{C_i} est donné par une équation polynomiale de degré 2. On applique le théorème de Bézout: $\#Sol = 2^3 = 8$.

Généricité

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, **en position générale**, *il existe exactement huit cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

Généricité

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, **en position générale**, *il existe exactement huit cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

Pour certaines configurations "spéciales" de (C_0, C_1, C_2) l'intersection $Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ n'est pas transverse.

Généricité

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, **en position générale**, *il existe exactement huit cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

Pour certaines configurations "spéciales" de (C_0, C_1, C_2) l'intersection $Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ n'est pas transverse.

- Multiplicités.
- Excès de dimension ($dim(Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}) > 0$):

Généricité

Théorème

Étant donnés trois cercles dans le plan, **en position générale**, *il existe exactement huit cercles simultanément tangents à ces trois cercles.*

Pour certaines configurations "spéciales" de (C_0, C_1, C_2) l'intersection $Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ n'est pas transverse.

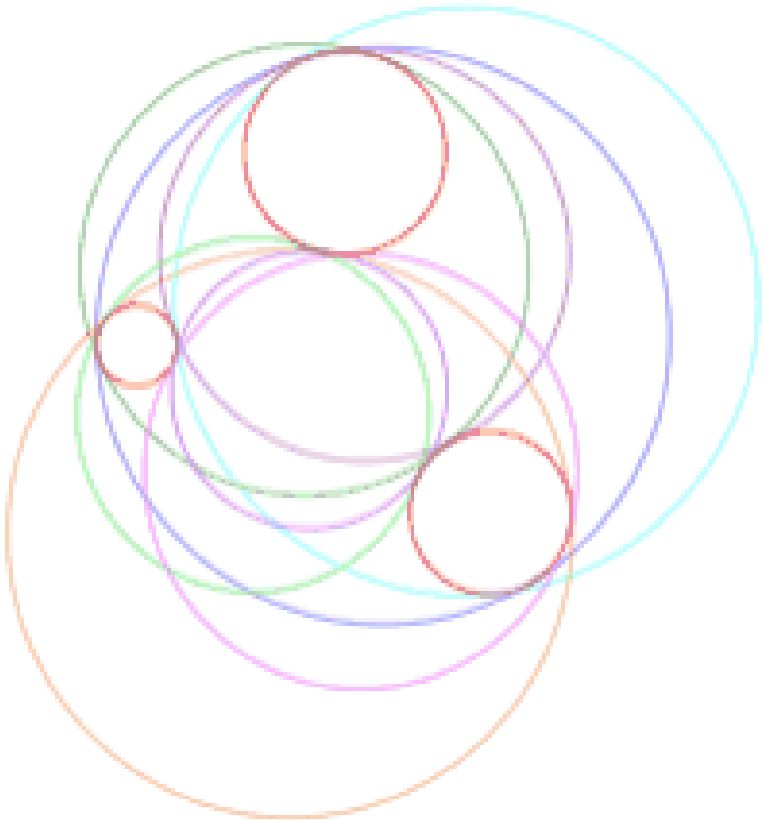
- Multiplicités.
- Excès de dimension ($dim(Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}) > 0$): le nombre de solutions est indéfini.

Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.

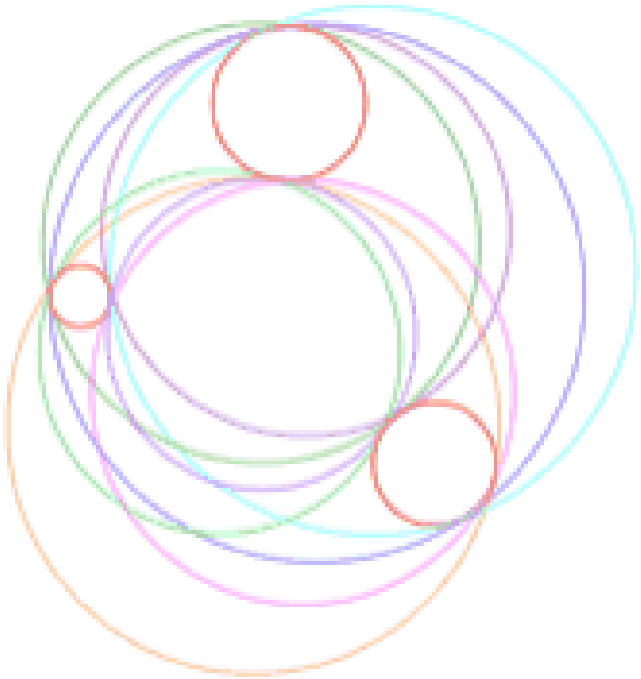
Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.



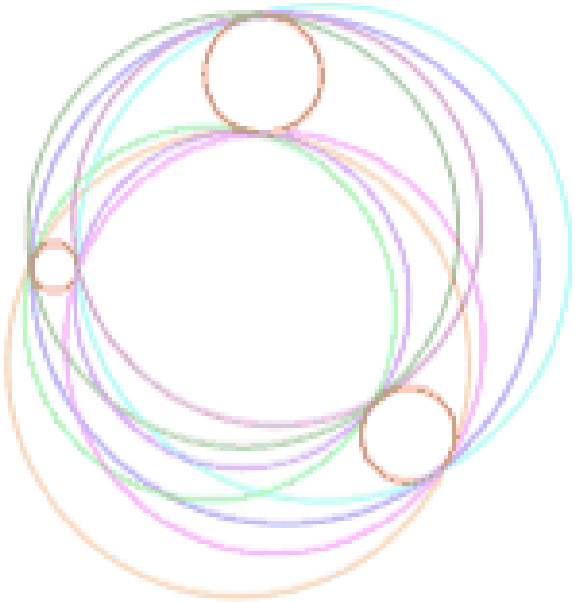
Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.



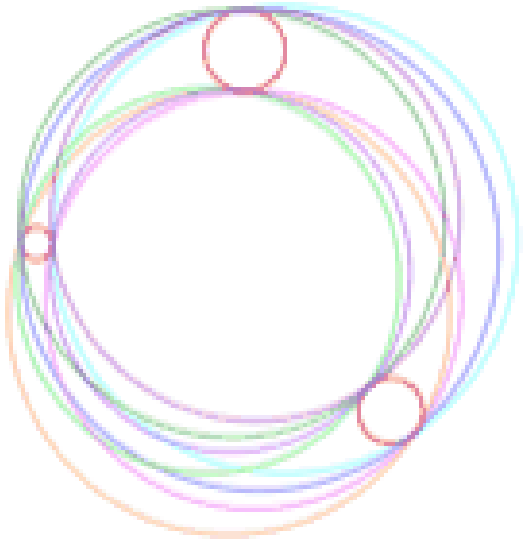
Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.



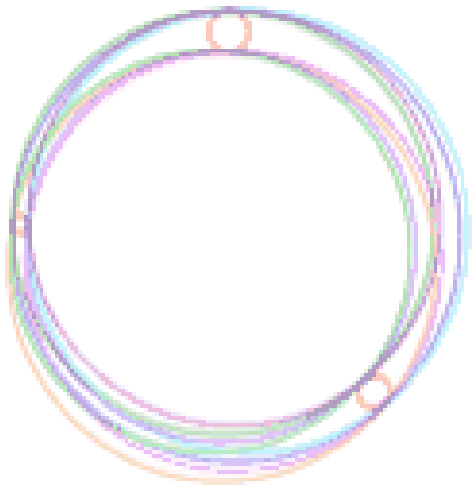
Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.



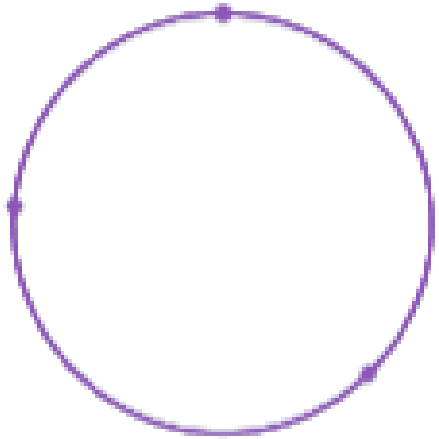
Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.



Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.



Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.

$Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ est localement donné par (en coordonnées locales (X, Y, Z) sur $\mathbb{CP}^3$)

$$X^2 = 0 \qquad Y^2 = 0 \qquad Z^2 = 0.$$

Solution de multiplicité 8

C_0, C_1 et C_2 de rayons nuls.

$Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ est localement donné par (en coordonnées locales (X, Y, Z) sur $\mathbb{CP}^3$)

$$X^2 = 0 \qquad Y^2 = 0 \qquad Z^2 = 0.$$

La multiplicité se calcule par:

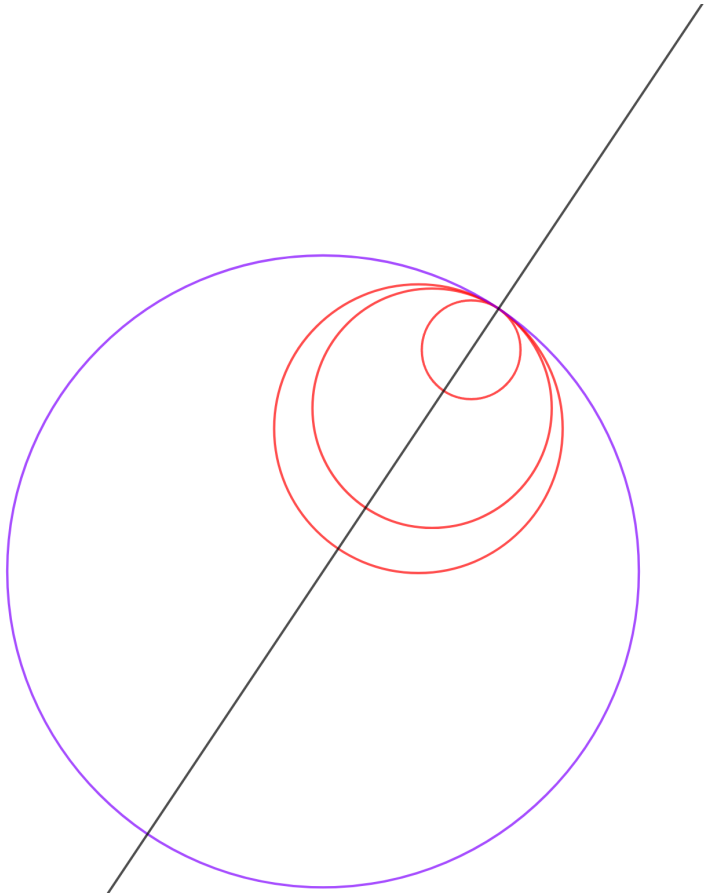
$$Dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2, Y^2, Z^2)) = 8$$

Un cas encore plus spécial

C_0, C_1 et C_2 tangents: une droite de solutions.

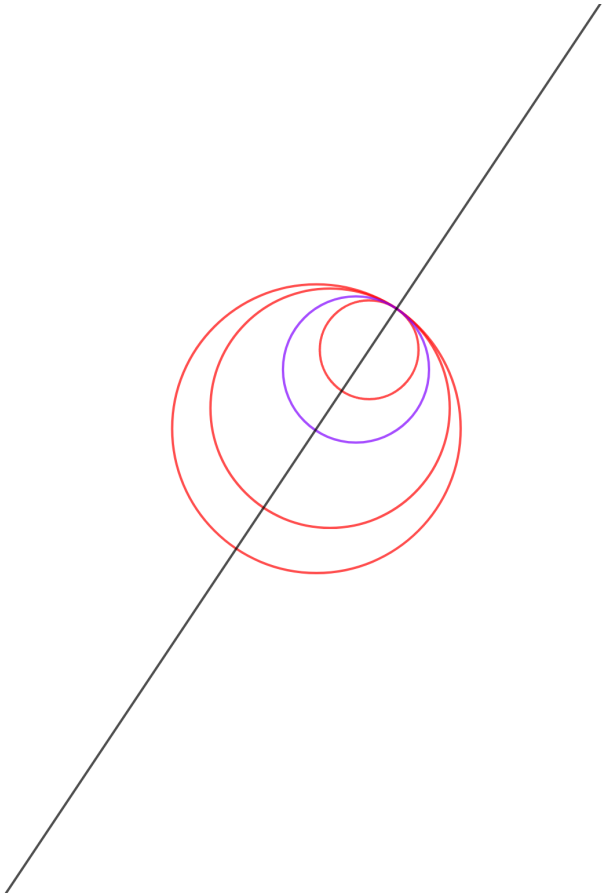
Un cas encore plus spécial

C_0, C_1 et C_2 tangents: une droite de solutions.



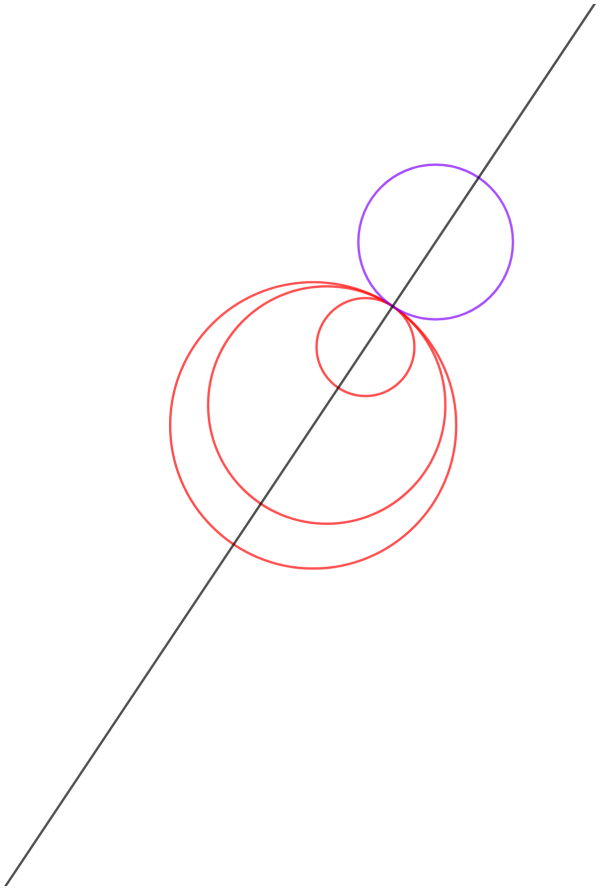
Un cas encore plus spécial

C_0, C_1 et C_2 tangents: une droite de solutions.



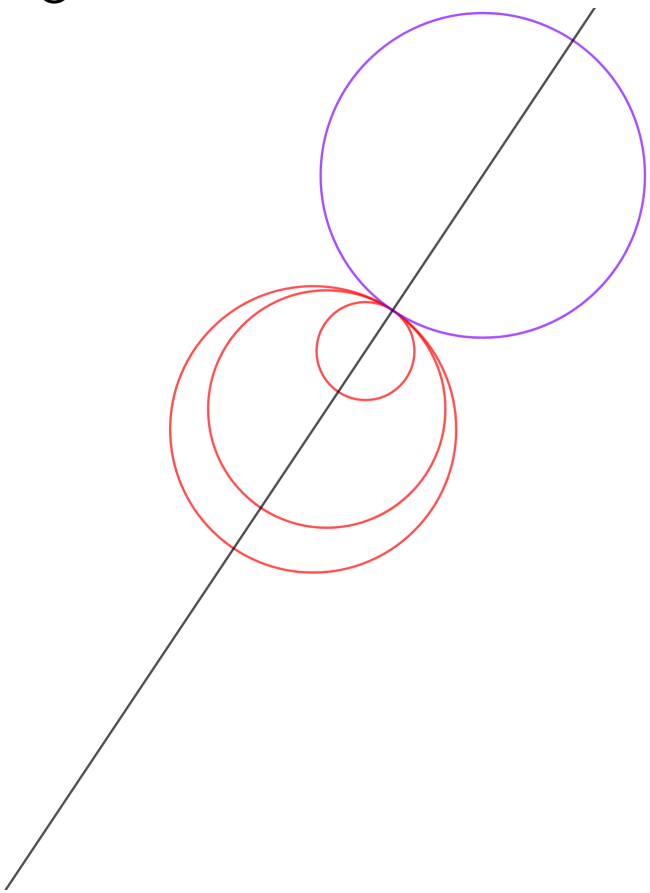
Un cas encore plus spécial

C_0, C_1 et C_2 tangents: une droite de solutions.



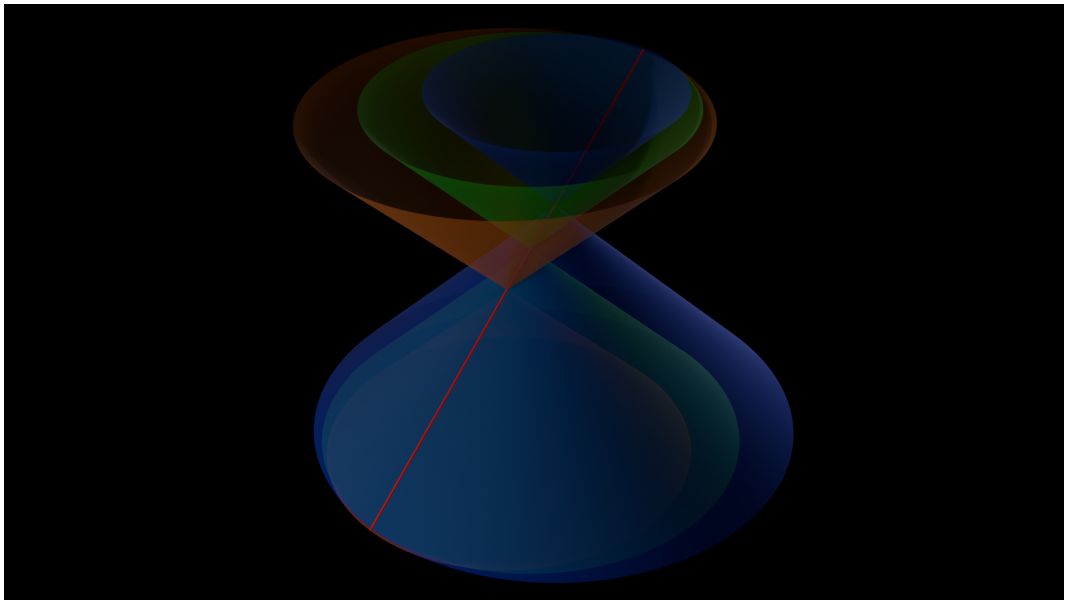
Un cas encore plus spécial

C_0, C_1 et C_2 tangents: une droite de solutions.



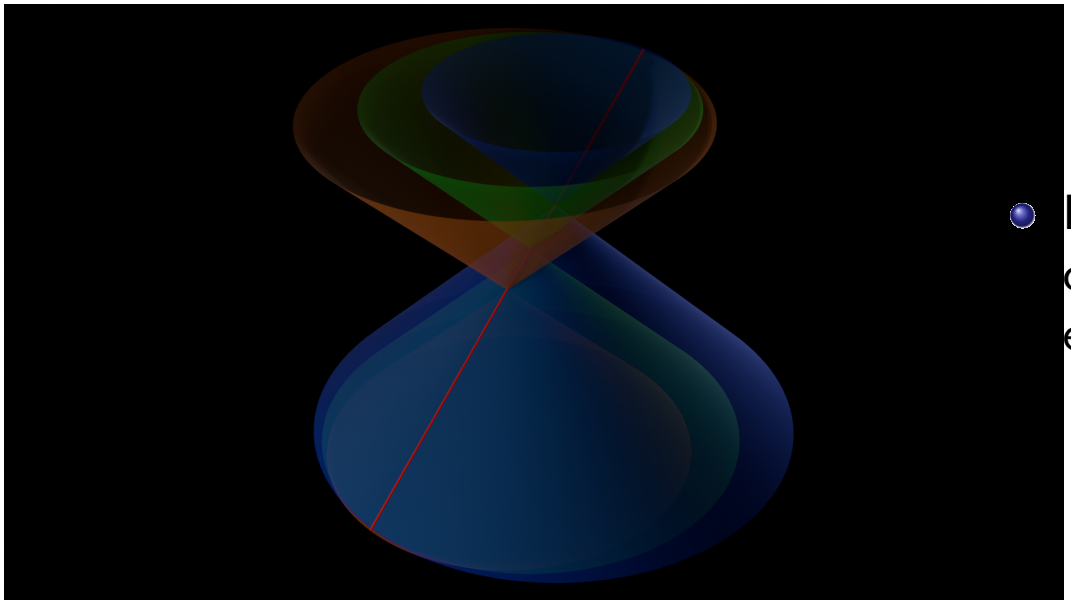
Structures dérivées

Les trois cônes Z_{C_0}, Z_{C_1} et Z_{C_2} partagent une même droite.



Structures dérivées

Les trois cônes Z_{C_0}, Z_{C_1} et Z_{C_2} partagent une même droite.

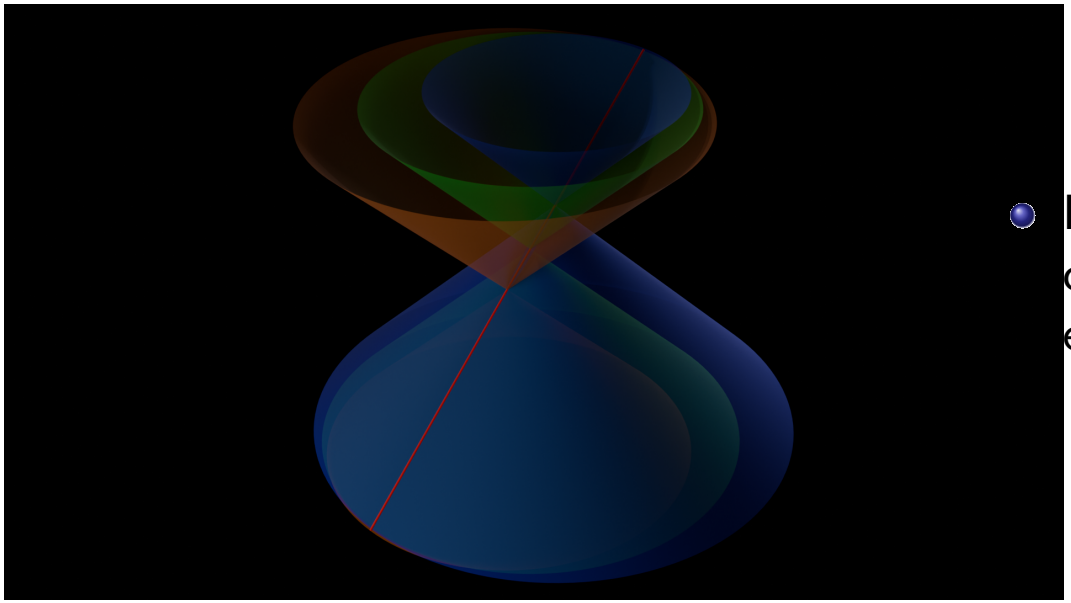


- Localement sur Z_{C_0} (en coordonnées locales (X, Y)) *Sol* est donné par deux équations

$$X^2 = 0 \qquad X^2 = 0$$

Structures dérivées

Les trois cônes Z_{C_0}, Z_{C_1} et Z_{C_2} partagent une même droite.



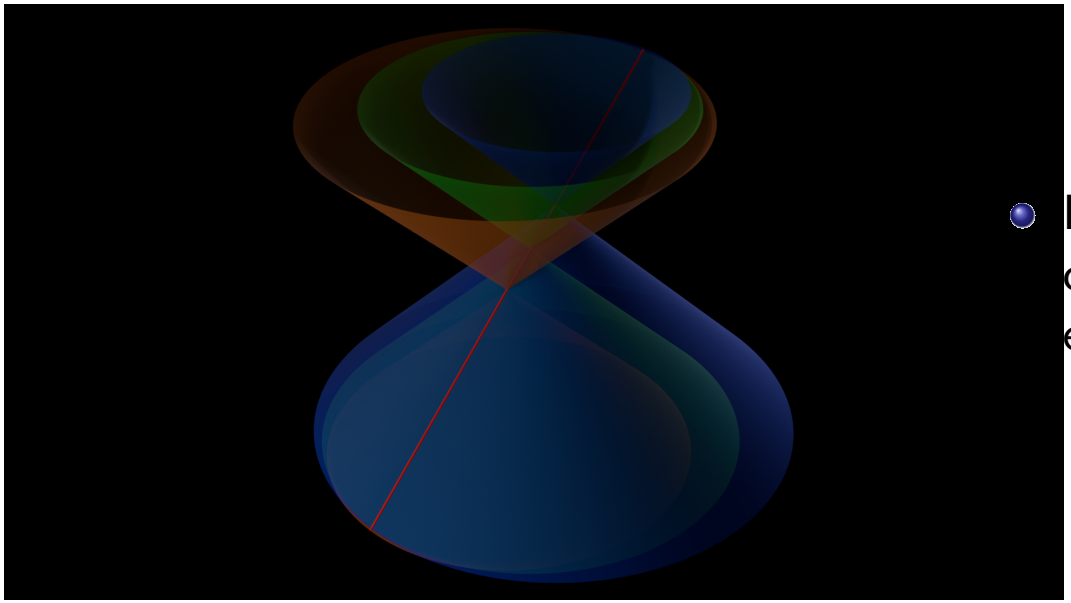
- Localement sur Z_{C_0} (en coordonnées locales (X, Y)) *Sol* est donné par deux équations

$$X^2 = 0 \qquad X^2 = 0$$

Problème: $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2, X^2) = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2)$ de dimension infinie.

Structures dérivées

Les trois cônes Z_{C_0}, Z_{C_1} et Z_{C_2} partagent une même droite.



- Localement sur Z_{C_0} (en coordonnées locales (X, Y)) *Sol* est donné par deux équations

$$X^2 = 0 \qquad X^2 = 0$$

Problème: $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2, X^2) = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2)$ de dimension infinie.
Géométrie dérivée: nouveau point de vue sur le quotient $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2, X^2)$ (inspirée de la formule d'intersection de Serre).

Structures dérivées: Algèbres de Koszul

Pour A une $\mathbb{C}$-algèbre et $f_1, \ldots, f_n \in A$

$$K(A, f_*) := A[\eta_1, \ldots, \eta_n]$$

A-algèbre commutative graduée libre sur des générateurs η_i en degré -1 (variables "fermioniques").

Structures dérivées: Algèbres de Koszul

Pour A une $\mathbb{C}$-algèbre et $f_1, \ldots, f_n \in A$

$$K(A, f_*) := A[\eta_1, \ldots, \eta_n]$$

A-algèbre commutative graduée libre sur des générateurs η_i en degré -1 (variables "fermioniques"). $K(A, f_*)$ est muni d'une différentielle: opérateur de degré 1

$$d : A \to A$$

avec $d^2 = 0$, $d(\eta_i) = f_i$, $d(xy) = x.d(y) \pm y.d(x)$.

Structures dérivées: Algèbres de Koszul

Pour A une $\mathbb{C}$-algèbre et $f_1, \ldots, f_n \in A$

$$K(A, f_*) := A[\eta_1, \ldots, \eta_n]$$

A-algèbre commutative graduée libre sur des générateurs η_i en degré -1 (variables "fermioniques"). $K(A, f_*)$ est muni d'une différentielle: opérateur de degré 1

$$d : A \to A$$

avec $d^2 = 0$, $d(\eta_i) = f_i$, $d(xy) = x.d(y) \pm y.d(x)$.

$K(A, f_*)$ est une **dg-algèbre commutative** ("cdga") qui représente le "quotient homotopique" de A par l'idéal $(f_1, \ldots, f_n)$ (penser à η_i comme un "chemin continu" entre f_i et 0).

Schémas dérivés

$$H^*(K(A, f_*)) = \oplus_{i \leq 0} H^i(K(A, f_*)) := \frac{Kerd}{Imd}$$

Lorsque les équations f_i sont en position générale

$$H^*(K(A, f_*)) \simeq H^0(K(A, f_*)) \simeq A/(f_1, \ldots, f_n)$$

Schémas dérivés

$$H^*(K(A, f_*)) = \oplus_{i \leq 0} H^i(K(A, f_*)) := \frac{Kerd}{Imd}$$

Lorsque les équations f_i sont en position générale

$$H^*(K(A, f_*)) \simeq H^0(K(A, f_*)) \simeq A/(f_1, \ldots, f_n)$$

On dit alors que $K(A, f_*)$ est équivalente à $A/(f_1, \ldots, f_n)$.

Schémas dérivés

$$H^*(K(A, f_*)) = \oplus_{i \leq 0} H^i(K(A, f_*)) := \frac{Kerd}{Imd}$$

Lorsque les équations f_i sont en position générale

$$H^*(K(A, f_*)) \simeq H^0(K(A, f_*)) \simeq A/(f_1, \ldots, f_n)$$

On dit alors que $K(A, f_*)$ est équivalente à $A/(f_1, \ldots, f_n)$.
Mais en général ce n'est pas vrai:

$$H^*(K(A, f, f)) \simeq (A/f)[\eta] \simeq (A/f) \oplus \eta.(A/f) \qquad (\eta^2 = 0).$$

Schémas dérivés

$$H^*(K(A, f_*)) = \oplus_{i \leq 0} H^i(K(A, f_*)) := \frac{Kerd}{Imd}$$

Lorsque les équations f_i sont en position générale

$$H^*(K(A, f_*)) \simeq H^0(K(A, f_*)) \simeq A/(f_1, \ldots, f_n)$$

On dit alors que $K(A, f_*)$ est équivalente à $A/(f_1, \ldots, f_n)$.
Mais en général ce n'est pas vrai:

$$H^*(K(A, f, f)) \simeq (A/f)[\eta] \simeq (A/f) \oplus \eta.(A/f) \qquad (\eta^2 = 0).$$

Définition

Un **schéma dérivé** *est une variété algébrique X munie de cdga localement définies B telles que*

$$H^0(B) \simeq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_p)$$

où $(f_1, \ldots, f_p)$ sont les équations locales de X.

Schémas dérivés et cercles d'Apollonius

Retour sur C_0, C_1 et C_2 tous tangents en un point. La variété $Sol = \mathbb{CP}^1$ admet une structure dérivée canonique (localement $K(\mathbb{C}[X, Y], X^2, X^2)$).

Schémas dérivés et cercles d'Apollonius

Retour sur C_0, C_1 et C_2 tous tangents en un point. La variété $Sol = \mathbb{CP}^1$ admet une structure dérivée canonique (localement $K(\mathbb{C}[X, Y], X^2, X^2)$). On a

$$Dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(\mathbb{CP}^1, B)) := \sum_i (-1)^{i+j} Dim_{\mathbb{C}}(H^j(\mathbb{CP}^1, H^i(B))) = 8$$

Schémas dérivés et cercles d'Apollonius

Retour sur C_0, C_1 et C_2 tous tangents en un point. La variété $Sol = \mathbb{CP}^1$ admet une structure dérivée canonique (localement $K(\mathbb{C}[X, Y], X^2, X^2)$). On a

$$Dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(\mathbb{CP}^1, B)) := \sum_i (-1)^{i+j} Dim_{\mathbb{C}}(H^j(\mathbb{CP}^1, H^i(B))) = 8$$

Le "nombre de points dérivé" de Sol est 8.

Schémas dérivés et cercles d'Apollonius

Retour sur C_0, C_1 et C_2 tous tangents en un point. La variété $Sol = \mathbb{CP}^1$ admet une structure dérivée canonique (localement $K(\mathbb{C}[X, Y], X^2, X^2)$). On a

$$Dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(\mathbb{CP}^1, B)) := \sum_i (-1)^{i+j} Dim_{\mathbb{C}}(H^j(\mathbb{CP}^1, H^i(B))) = 8$$

Le "nombre de points dérivé" de Sol est 8. La structure dérivée sur Sol vient compenser l'excès de dimension.

Schémas dérivés et cercles d'Apollonius

Retour sur C_0, C_1 et C_2 tous tangents en un point. La variété $Sol = \mathbb{CP}^1$ admet une structure dérivée canonique (localement $K(\mathbb{C}[X, Y], X^2, X^2)$). On a

$$Dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(\mathbb{CP}^1, B)) := \sum_i (-1)^{i+j} Dim_{\mathbb{C}}(H^j(\mathbb{CP}^1, H^i(B))) = 8$$

Le "nombre de points dérivé" de *Sol* est 8. La structure dérivée sur *Sol* vient compenser l'excès de dimension.

Théorème

Lorsque Sol est muni de sa structure dérivée naturelle, son "nombre de points" est toujours 8: il y a toujours 8 "solutions" au problème des cercles d'Apollonius, quelque soit la configuration des C_i.

Deux remarques

Deux remarques

1. Pour des problèmes énumératifs plus riches les positions générales n'existent souvent pas ! Toutes les configurations sont "spéciales" : les espaces de solutions possèdent très souvent des excès de dimension, et donc des structures dérivées non-triviales.

Deux remarques

1. Pour des problèmes énumératifs plus riches les positions générales n'existent souvent pas ! Toutes les configurations sont "spéciales" : les espaces de solutions possèdent très souvent des excès de dimension, et donc des structures dérivées non-triviales.
2. Les structures dérivées donnent bien plus que des nombres, donnent lieu à une géométrie à part entière utile pour certaines questions énumératives.

Géométrie dérivée

Il existe une "géométrie (algébrique) dérivée": étude des schémas dérivés. Très similaire à la géométrie algébrique. Quelques aspects spécifiques:

Géométrie dérivée

Il existe une "géométrie (algébrique) dérivée": étude des schémas dérivés. Très similaire à la géométrie algébrique. Quelques aspects spécifiques:

1. Les fonctions $\mathcal{O}(X)$ sur un schéma dérivé X forment une **algèbre différentielle graduée commutative** (cdga).

Géométrie dérivée

Il existe une "géométrie (algébrique) dérivée": étude des schémas dérivés. Très similaire à la géométrie algébrique. Quelques aspects spécifiques:

1. Les fonctions $\mathcal{O}(X)$ sur un schéma dérivé X forment une **algèbre différentielle graduée commutative** (cdga). On a une partie "classique" $H^0(\mathcal{O}(X))$, et une partie "dérivée" (ou "virtuelle") $H^i(\mathcal{O}(X))$ $i < 0$.

Géométrie dérivée

Il existe une "géométrie (algébrique) dérivée": étude des schémas dérivés. Très similaire à la géométrie algébrique. Quelques aspects spécifiques:

1. Les fonctions $\mathcal{O}(X)$ sur un schéma dérivé X forment une **algèbre différentielle graduée commutative** (cdga). On a une partie "classique" $H^0(\mathcal{O}(X))$, et une partie "dérivée" (ou "virtuelle") $H^i(\mathcal{O}(X))$ $i < 0$.
2. Pour $x \in X$, on dispose d'un **complexe tangent** $\mathbb{T}_x X$

$$\mathbb{T}_x^0 X \xrightarrow{d_0} \mathbb{T}_x^1 X \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{i-1}} \mathbb{T}_x^i X \xrightarrow{d_i} \ldots$$

Géométrie dérivée

Il existe une "géométrie (algébrique) dérivée": étude des schémas dérivés. Très similaire à la géométrie algébrique. Quelques aspects spécifiques:

1. Les fonctions $\mathcal{O}(X)$ sur un schéma dérivé X forment une **algèbre différentielle graduée commutative** (cdga). On a une partie "classique" $H^0(\mathcal{O}(X))$, et une partie "dérivée" (ou "virtuelle") $H^i(\mathcal{O}(X))$ $i < 0$.
2. Pour $x \in X$, on dispose d'un **complexe tangent** $\mathbb{T}_x X$

$$\mathbb{T}_x^0 X \xrightarrow{d_0} \mathbb{T}_x^1 X \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{i-1}} \mathbb{T}_x^i X \xrightarrow{d_i} \dots$$

En particulier, $H^0(\mathbb{T}_x X) = Kerd_0$ tangent "classique" et $H^i(\mathbb{T}_x X) = \frac{Kerd_i}{Imd_{i-1}}$ tangents "virtuels".

Géométrie dérivée

Il existe une "géométrie (algébrique) dérivée": étude des schémas dérivés. Très similaire à la géométrie algébrique. Quelques aspects spécifiques:

1. Les fonctions $\mathcal{O}(X)$ sur un schéma dérivé X forment une **algèbre différentielle graduée commutative** (cdga). On a une partie "classique" $H^0(\mathcal{O}(X))$, et une partie "dérivée" (ou "virtuelle") $H^i(\mathcal{O}(X))$ $i < 0$.
2. Pour $x \in X$, on dispose d'un **complexe tangent** $\mathbb{T}_x X$

$$\mathbb{T}_x^0 X \xrightarrow{d_0} \mathbb{T}_x^1 X \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{i-1}} \mathbb{T}_x^i X \xrightarrow{d_i} \dots$$

   En particulier, $H^0(\mathbb{T}_x X) = Kerd_0$ tangent "classique" et $H^i(\mathbb{T}_x X) = \frac{Kerd_i}{Imd_{i-1}}$ tangents "virtuels".

Dimension virtuelle: $Dim_x(X) = \sum_i (-1)^i H^i(\mathbb{T}_x X) \in \mathbb{Z}$.

Dimension virtuelle nulle

Cas important pour la géométrie énumérative: dimension virtuelle nulle. On est en droit d'espérer un "nombre de points virtuel" (pas si simple de trouver la bonne définition).

Dimension virtuelle nulle

Cas important pour la géométrie énumérative: dimension virtuelle nulle. On est en droit d'espérer un "nombre de points virtuel" (pas si simple de trouver la bonne définition).

Exemple 1: $Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ dans le problème d'Apollonius.

Dimension virtuelle nulle

Cas important pour la géométrie énumérative: dimension virtuelle nulle. On est en droit d'espérer un "nombre de points virtuel" (pas si simple de trouver la bonne définition).

Exemple 1: $Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ dans le problème d'Apollonius.

Exemple 2: $f : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Le lieu critique $Crit(f) = \{f'(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^r$ est muni d'une structure dérivée canonique de dimension virtuelle nulle.

Dimension virtuelle nulle

Cas important pour la géométrie énumérative: dimension virtuelle nulle. On est en droit d'espérer un "nombre de points virtuel" (pas si simple de trouver la bonne définition).

Exemple 1: $Sol = Z_{C_0} \cap Z_{C_1} \cap Z_{C_2}$ dans le problème d'Apollonius.

Exemple 2: $f : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Le lieu critique $Crit(f) = \{f'(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^r$ est muni d'une structure dérivée canonique de dimension virtuelle nulle.

$$\mathbb{T}_x Crit(f) : \left(T_x X \overset{Hess(f)}{\longrightarrow} T_x X^\vee \right)$$

Lieux critiques dérivés

Symétrie de la Hessienne

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{Hess(f)} & T_x X^\vee \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ T_x X & \xrightarrow[Hess(f)^t]{} & T_x X^\vee \end{array}$$

Lieux critiques dérivés

Symétrie de la Hessienne

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{Hess(f)} & T_x X^\vee \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ T_x X & \xrightarrow[Hess(f)^t]{} & T_x X^\vee \end{array}$$

$$\mathbb{T}_x Crit(f) \simeq \mathbb{T}_x Crit(f)^\vee[-1]$$

Le lieu critique dérivé d'une fonction est muni d'une **structure symplectique de degré -1**.

Lieux critiques dérivés

Symétrie de la Hessienne

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{Hess(f)} & T_x X^\vee \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ T_x X & \xrightarrow[Hess(f)^t]{} & T_x X^\vee \end{array}$$

$$\mathbb{T}_x Crit(f) \simeq \mathbb{T}_x Crit(f)^\vee[-1]$$

Le lieu critique dérivé d'une fonction est muni d'une **structure symplectique de degré -1**.

Théorème (Bussi-Brav-Joyce)

Tout schéma dérivé muni d'une structure symplectique de degré -1 est localement (au sens Zariski) équivalent à $Crit(f)$ pour une fonction f.

Invariants de type Donaldson-Thomas

Invariants DT : comptent des fibrés vectoriels (ou faisceaux coherents, ou complexes cohérents) sur des variétés algébriques de dimension 3 de Calabi-Yau.

Invariants de type Donaldson-Thomas

Invariants DT: comptent des fibrés vectoriels (ou faisceaux coherents, ou complexes cohérents) sur des variétés algébriques de dimension 3 de Calabi-Yau. (X de CY si X est orientée au sens holomorphe: il existe une 3-forme holomorphe partout non-nulle.)

Invariants de type Donaldson-Thomas

Invariants DT: comptent des fibrés vectoriels (ou faisceaux coherents, ou complexes cohérents) sur des variétés algébriques de dimension 3 de Calabi-Yau. (X de CY si X est orientée au sens holomorphe: il existe une 3-forme holomorphe partout non-nulle.)

Pour X CY on considère $M(X)$ l'espace de modules des faisceaux cohérents sur X (muni d'une structure dérivée canonique).

Invariants de type Donaldson-Thomas

Invariants DT: comptent des fibrés vectoriels (ou faisceaux coherents, ou complexes cohérents) sur des variétés algébriques de dimension 3 de Calabi-Yau. (X de CY si X est orientée au sens holomorphe: il existe une 3-forme holomorphe partout non-nulle.)

Pour X CY on considère $M(X)$ l'espace de modules des faisceaux cohérents sur X (muni d'une structure dérivée canonique). $M(X)$ possède en général un infinité de composantes

$$M(X) \simeq \coprod_{\nu} M_{\nu}(X)$$

Invariants de type Donaldson-Thomas

Invariants DT: comptent des fibrés vectoriels (ou faisceaux coherents, ou complexes cohérents) sur des variétés algébriques de dimension 3 de Calabi-Yau. (X de CY si X est orientée au sens holomorphe: il existe une 3-forme holomorphe partout non-nulle.)

Pour X CY on considère $M(X)$ l'espace de modules des faisceaux cohérents sur X (muni d'une structure dérivée canonique). $M(X)$ possède en général un infinité de composantes

$$M(X) \simeq \coprod_{\nu} M_{\nu}(X)$$

X de Calabi-Yau $\Rightarrow$ $M_{\nu}(X)$ est de dimension virtuelle nulle.

Invariants de type Donaldson-Thomas

Invariants DT: comptent des fibrés vectoriels (ou faisceaux coherents, ou complexes cohérents) sur des variétés algébriques de dimension 3 de Calabi-Yau. (X de CY si X est orientée au sens holomorphe: il existe une 3-forme holomorphe partout non-nulle.)

Pour X CY on considère $M(X)$ l'espace de modules des faisceaux cohérents sur X (muni d'une structure dérivée canonique). $M(X)$ possède en général un infinité de composantes

$$M(X) \simeq \coprod_{\nu} M_{\nu}(X)$$

X de Calabi-Yau $\Rightarrow$ $M_{\nu}(X)$ est de dimension virtuelle nulle.

Définition

$$DT_{\nu}(X) := \text{nombre de points virtuel de } \mathrm{M}_{\nu}(\mathrm{X})$$

$$DT(X) = \sum_{\nu} DT_{\nu}(X).t^{\nu}$$

Invariants de type Donaldson-Thomas

Kontsevich-Soibelman (2010): nouvelle approche aux invariants DT (très générale, e.g. X peut être "non-commutative").

Invariants de type Donaldson-Thomas

Kontsevich-Soibelman (2010): nouvelle approche aux invariants DT (très générale, e.g. X peut être "non-commutative").

1. Interpréter $DT_\nu(X)$ comme la dimension d'un espace vectoriel naturel $H_\nu(X)$ (espaces "BPS").

Invariants de type Donaldson-Thomas

Kontsevich-Soibelman (2010): nouvelle approche aux invariants DT (très générale, e.g. X peut être "non-commutative").

1. Interpréter $DT_\nu(X)$ comme la dimension d'un espace vectoriel naturel $H_\nu(X)$ (espaces "BPS").
2. Structures additionnelles sur $H(X) = \oplus_\nu H_\nu(X)$: multiplication "de Hall".

Invariants de type Donaldson-Thomas

Kontsevich-Soibelman (2010): nouvelle approche aux invariants DT (très générale, e.g. X peut être "non-commutative").

1. Interpréter $DT_\nu(X)$ comme la dimension d'un espace vectoriel naturel $H_\nu(X)$ (espaces "BPS").
2. Structures additionnelles sur $H(X) = \oplus_\nu H_\nu(X)$: multiplication "de Hall".
3. Beaucoup d'autres choses: formules de type wall-crossing, aspects motiviques (périodes exponentielles) ...

Invariants de type Donaldson-Thomas

Kontsevich-Soibelman (2010): nouvelle approche aux invariants DT (très générale, e.g. X peut être "non-commutative").

1. Interpréter $DT_\nu(X)$ comme la dimension d'un espace vectoriel naturel $H_\nu(X)$ (espaces "BPS").
2. Structures additionnelles sur $H(X) = \oplus_\nu H_\nu(X)$: multiplication "de Hall".
3. Beaucoup d'autres choses: formules de type wall-crossing, aspects motiviques (périodes exponentielles) ...

Approche longtemps restée conjecturale mais en partie réalisée: Brav-Bussi-Dupont-Joyce, Joyce-Upmeier, Naef-Safronov, Kinjo-Park-Safronov (juin 2024) ...

Géométrie dérivée et invariants *DT*

Théorème (Pantev-T.-Vezzosi-Vaquié)

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension d, alors $M(X)$ (espace de modules des cohérents sur X) est canoniquement muni d'une structure symplectique de degré $2-d$.

Géométrie dérivée et invariants *DT*

Théorème (Pantev-T.-Vezzosi-Vaquié)

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension d, alors $M(X)$ (espace de modules des cohérents sur X) est canoniquement muni d'une structure symplectique de degré $2-d$.

Brav-Bussi-Joyce: si $dim(X) = 3$ alors $M_\nu(X)$ est localement de la forme $Crit(f) \Rightarrow H_\nu =$ espace des cycles évanescents de la fonction f.

Géométrie dérivée et invariants *DT*

Théorème (Pantev-T.-Vezzosi-Vaquié)

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension d, alors $M(X)$ (espace de modules des cohérents sur X) est canoniquement muni d'une structure symplectique de degré $2-d$.

Brav-Bussi-Joyce: si $dim(X) = 3$ alors $M_\nu(X)$ est localement de la forme $Crit(f) \Rightarrow H_\nu =$ espace des cycles évanescents de la fonction f.

Brav-Bussi-Dupont-Joyce et Joyce-Upmeier: les espaces H_ν locaux se recollent en un espace $H_\nu(X)$ bien défini globalement.

Géométrie dérivée et invariants *DT*

Théorème (Pantev-T.-Vezzosi-Vaquié)

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension d, alors $M(X)$ (espace de modules des cohérents sur X) est canoniquement muni d'une structure symplectique de degré $2-d$.

Brav-Bussi-Joyce: si $dim(X) = 3$ alors $M_\nu(X)$ est localement de la forme $Crit(f) \Rightarrow H_\nu =$ espace des cycles évanescents de la fonction f.

Brav-Bussi-Dupont-Joyce et Joyce-Upmeier: les espaces H_ν locaux se recollent en un espace $H_\nu(X)$ bien défini globalement.

L'espace des modules des morphismes produit une correspondance lagrangienne

$$M_{\nu_1}(X) \oplus M_{\nu_2}(X) \longleftarrow \bullet \longrightarrow M_{\nu_1+\nu_2}(X)$$

Géométrie dérivée et invariants *DT*

Théorème (Pantev-T.-Vezzosi-Vaquié)

Si X est une variété de Calabi-Yau de dimension d, alors $M(X)$ (espace de modules des cohérents sur X) est canoniquement muni d'une structure symplectique de degré $2-d$.

Brav-Bussi-Joyce: si $dim(X) = 3$ alors $M_\nu(X)$ est localement de la forme $Crit(f) \Rightarrow H_\nu =$ espace des cycles évanescents de la fonction f.

Brav-Bussi-Dupont-Joyce et Joyce-Upmeier: les espaces H_ν locaux se recollent en un espace $H_\nu(X)$ bien défini globalement.

L'espace des modules des morphismes produit une correspondance lagrangienne

$$M_{\nu_1}(X) \oplus M_{\nu_2}(X) \longleftarrow \bullet \longrightarrow M_{\nu_1+\nu_2}(X)$$

Kinjo-Park-Safronov: existence de $H_{\nu_1}(X) \otimes H_{\nu_2}(X) \to H_{\nu_1+\nu_2}(X)$

Compléments

1. Nombres $DT_\nu(X) \to$ espaces $H_\nu(X)$: "catégorification". La multiplication de Hall n'a pas de sens avant cette catégorification.

Compléments

1. Nombres $DT_\nu(X) \to$ espaces $H_\nu(X)$: "catégorification". La multiplication de Hall n'a pas de sens avant cette catégorification. Progrès typique des "techniques dérivées".

Compléments

1. Nombres $DT_\nu(X) \to$ espaces $H_\nu(X)$: "catégorification". La multiplication de Hall n'a pas de sens avant cette catégorification. Progrès typique des "techniques dérivées".
2. La catégorification peut se poursuivre: espaces $H_\nu(X) \to$ catégories "*BPS*" localement des catégories de factorisations matricielles (Hennion-Holstein-Robalo, Padurariu-Toda).

Compléments

1. Nombres $DT_\nu(X) \to$ espaces $H_\nu(X)$: "catégorification". La multiplication de Hall n'a pas de sens avant cette catégorification. Progrès typique des "techniques dérivées".
2. La catégorification peut se poursuivre: espaces $H_\nu(X) \to$ catégories "*BPS*" localement des catégories de factorisations matricielles (Hennion-Holstein-Robalo, Padurariu-Toda).
3. Liens avec les TQFT étendues sous-jacent: Bozec-Calaque-Scherotzke.
4. Existence de la multiplication de Hall $\Rightarrow$ formule d'"intégralité de Kontsevich-Soibelman" (théorème de type *PBW* pour les algèbres de Hall). Davison-Meinhardt cas des carquois, Kinjo-Park-Safronov (en cours).

Compléments

1. Nombres $DT_\nu(X) \to$ espaces $H_\nu(X)$: "catégorification". La multiplication de Hall n'a pas de sens avant cette catégorification. Progrès typique des "techniques dérivées".
2. La catégorification peut se poursuivre: espaces $H_\nu(X) \to$ catégories "*BPS*" localement des catégories de factorisations matricielles (Hennion-Holstein-Robalo, Padurariu-Toda).
3. Liens avec les TQFT étendues sous-jacent: Bozec-Calaque-Scherotzke.
4. Existence de la multiplication de Hall $\Rightarrow$ formule d'"intégralité de Kontsevich-Soibelman" (théorème de type *PBW* pour les algèbres de Hall). Davison-Meinhardt cas des carquois, Kinjo-Park-Safronov (en cours).
5. Kontsevich-Katzarkov-Sheshmani (en cours): propriété modulaire des séries DT.

Compléments

1. Nombres $DT_\nu(X) \to$ espaces $H_\nu(X)$: "catégorification". La multiplication de Hall n'a pas de sens avant cette catégorification. Progrès typique des "techniques dérivées".
2. La catégorification peut se poursuivre: espaces $H_\nu(X) \to$ catégories "*BPS*" localement des catégories de factorisations matricielles (Hennion-Holstein-Robalo, Padurariu-Toda).
3. Liens avec les TQFT étendues sous-jacent: Bozec-Calaque-Scherotzke.
4. Existence de la multiplication de Hall $\Rightarrow$ formule d'"intégralité de Kontsevich-Soibelman" (théorème de type *PBW* pour les algèbres de Hall). Davison-Meinhardt cas des carquois, Kinjo-Park-Safronov (en cours).
5. Kontsevich-Katzarkov-Sheshmani (en cours): propriété modulaire des séries DT.
6. Catégorification et correspondances lagrangiennes: liens avec les TFT étendues sous-jacent: Bozec-Calaque-Scherotzke.

Géométrie dérivée et géométrie énumérative

Bertrand Toen

LAREMA - Angers, juin 2025