Cours 2 : homologie

Bertrand Toën

Mardi 3 Mars 2020

Pour une référence classique sur l'homologie voir [Sp].

1 CW finis

Nous avons vu (voir Cours 1') la notion de colimite dans une catégorie. Dans la catégorie des espaces topologiques Top toutes les colimites et limites existes. En particulier, il existe des sommes amalgamées, c'est à dire des colimites le long de la catégorie

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 2. \end{array}$$

Pour un diagramme d'espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \\ & & \uparrow \\ X_0 & \longrightarrow & X_2 \end{array}$$

la somme amalgamée est notée $X_1 \cup_{X_0} X_2$ et entre dans un diagramme dit cocartésien

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X_1 \cup_{X_0} X_2 \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow \\ X_0 & \underset{j}{\longrightarrow} & X_2 \end{array}$$

Au niveau ensembliste, l'ensemble sous-jacent à $X_1 \cup_{X_0} X_2$ est le quotient de $X_1 \coprod X_2$ par la relation d'équivalence induite par $i(x) \sim j(x)$ pour $x \in X_0$. La topologie est déterminée par le fait que l'application quotient $X_1 \coprod X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ soit continue et soit la moins fine pour cette propriété.

Un CW fini est un espace topologique X homéomorphe à un espace X_n qui entre dans une suite finie d'immersion fermée

$$X_{-1} = \emptyset \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n$$

tel que chaque $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ soit obtenu par un rajout d'un nombre fini de cellules de dimension $i+1$. On rappelle que cela veut dire qu'il existe une somme amalgamée dans Top

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & X_{i+1} \simeq X_i \cup_{\coprod S^i} (\coprod D^{i+1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod S^i & \longrightarrow & \coprod D^{i+1} \end{array}$$

où $D^{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^{i+1} / |x| \leq 1\}$ et $S^i = \{x \in \mathbb{R}^{i+1} / |x| = 1\}$. Le choix d'une telle suite d'espaces sera appelé une *décomposition cellulaire de* X. Elle n'est pas donnée à priori et un espace possède de nombreuses décompositions cellulaires différentes.

Tous les espaces de la forme $\bar{X}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ du premier cours sont des CW-finis (Hironaka). Il en est de même de toutes les variétés différentiables compactes (Whitehead). Les CW-finis forment une bonne classe d'espaces topologiques pour nous.

2 Caractéristique d'Euler

La caractéristique d'Euler est une fonction à valeurs entières définie sur l'ensemble des CW finis. Il faut la comprendre comme une fonction de comptage qui mesure un cardinal. Il s'agit en réalité d'une extension de la notion de cardinal d'ensembles finis que nous allons commencer par revoir.

Soit Ens^f l'ensemble des classes d'isomorphismes d'ensembles finis. On définit une *fonction de comptage* comme une application

$$c : Ens^f \longrightarrow \mathbb{Z}$$

vérifiant les conditions suivantes.

1. (Unité) Pour tout ensemble ponctuel E on a $c(E) = 1$.
2. (Normalisation) $c(\emptyset) = 0$.
3. (Additivité) Si $A \subset E$ est une inclusion d'ensembles finis et que l'on note E/A l'ensemble quotient qui contracte A en un singleton, alors on a

$$c(E) = c(A) + c(E/A) - 1$$

On voit facilement qu'une fonction de comptage existe et est unique égale à la fonction cardinal $E \mapsto |E|$. La caractéristique d'Euler est un analogue de la fonction de comptage pour les CW finis lorsque l'on demande de plus la propriété d'invariance par homotopie.

On note CW^f l'ensemble des classes d'homéomorphisme de CW finis. Une fonction *caractéristique d'Euler* est une application

$$\chi : CW^f \longrightarrow \mathbb{Z}$$

vérifiant les propriétés suivantes.

1. (Unité) Si X est contractile alors $\chi(X) = 1$.
2. (Normalisation) $\chi(\emptyset) = 0$.

3. (Additivité) Si $A \subset X$ est un CW fini relatif alors on a $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X/A) - 1$.

Ici, un CW fini relatif signifie que X est obtenu à partir de A par un rajout d'un nombre fini de cellules. Dans ce cas X/A est l'espace obtenu en contractant A en un point, qui est encore un CW fini.

Theorème 2.1 *Un caractéristique d'Euler existe et est unique.*

L'unicité est facile. En effet, soit X un CW fini et considérons une décomposition cellulaire

$$X_{-1} = \emptyset \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n$$

Par la propriété d'additivité appliquée à l'inclusion $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ on trouve

$$\chi(X_{i+1}) = \chi(X_i) + \chi(X_{i+1}/X_i) - 1.$$

L'espace X_{i+1}/X_i est un bouquet de sphères (de dimension $i+1$), et ainsi il nous suffit de déterminer la valeur de la fonction χ sur un bouquet de sphère $\vee S^{i+1}$. De nouveau par additivité pour l'inclusion $S^{i+1} \hookrightarrow \vee S^{i+1}$ on trouve par récurrence

$$\chi(\vee S^{i+1}) = k.\chi(S^{i+1}) - k$$

où k est le nombre de sphères dans le bouquet. Par ailleurs, l'inclusion $S^i \subset B^{i+1}$ et de nouveau l'additivité nous donne

$$1 = \chi(B^{i+1}) = \chi(S^i) + \chi(S^{i+1}) - 1.$$

Par récurrence et par les conditions d'unité et de normalisation cela nous donne $\chi(S^i) = 1 + (-1)^i$.

La conclusion est que $\chi(X)$ s'écrit donc comme une somme alternée

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i$$

où c_i est le nombre de cellules de dimension i dans la décomposition cellulaire. Ceci démontre l'unicité, mais l'unicité uniquement car cette formule ne démontre en réalité pas l'existence, il faudrait pour cela démontrer que la somme alternée en question est indépendante de la décomposition cellulaire de X. La partie existence du théorème 2.1 sera en réalité une conséquence de l'existence des foncteurs d'homologie.

3 Axiomes de Steenrod

Les axiomes de Steenrod caractérisent les foncteurs d'homologie, et forment un raffinement de la notion de caractéristique d'Euler. Il s'agit d'associer à tout CW fini X un groupe abélien $H_i(X)$, qui mesure la complexité de X en dimension i. Nous verrons au chapitre suivant comment les interpréter.

On note Top^f_{CW} la catégorie des CW finis est applications continues. Une *théorie homologique* (ordinaire) consiste est les données suivantes.

1. Une famille de foncteurs
$$H_n(-) : Top^f_{CW} \longrightarrow Ab$$
pour $n \in \mathbb{N}$. Pour une application continue $f : X \longrightarrow Y$ on notera $f_* = H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ l'application induite.
2. Pour tout $A \subset X$ un CW fini relatif, une famille de morphismes
$$\partial : H_{n+1}(X/A) \longrightarrow H_n(A)$$
fonctoriels en la paire $A \subset X$: si $A \subset X$ et $B \subset Y$ sont deux telles paires et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue envoyant A dans B, alors le diagramme suivant commute
$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(X/A) & \xrightarrow{\partial} & H_n(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_{n+1}(Y/B) & \xrightarrow[\partial]{} & H_n(B) \end{array}$$

On demande de plus que les conditions suivantes soient satisfaites.

1. Si X est contractile alors on a $H_n(X) = 0$ pour $n > 0$ et $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.
2. Si $A \subset X$ est un CW fini relatif alors les suites
$$H_{n+1}(A) \longrightarrow H_{n+1}(X) \oplus H_{n+1}(*) \longrightarrow H_{n+1}(X/A) \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \oplus H_n(*)$$
sont exactes pour tout $n \geq -1$ (où $H_{-1}(-) = 0$).
3. Si $X = \coprod X_\alpha$ est une réunion disjointe finie de CW finis alors les morphismes
$$\bigoplus H_n(X_\alpha) \longrightarrow H_n(X)$$
sont bijectifs pour tout n.

Theorème 3.1 *Une théorie homologique existe. De plus, deux théories homologiques sont isomorphes. Le groupe des automorphismes d'une théorie homologique est* $\mathbb{Z}/2$.

De nouveau l'unicité est un exercice relativement facile. L'existence nécessite de construite au moins une théorie d'homologie, qui est un énoncé difficile mais classique. Nous allons décrire une manière de procéder dans le paragraphe suivant.

Les axiomes de théorie de l'homologie permettent de calculer l'homologie d'espaces simples en choisissant de bonnes décompositions cellulaires.

Sphères. Une 0-sphère est ici la réunion disjointe de deux singletons. Une -1-sphère est l'ensemble vide. On a si $n > 0$.
$$H_0(S^n) \simeq H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \qquad H_i(S^n) = 0 \; si \; i \neq 0, n.$$

Pour voir cela, on décompose écrit S^n comme un quotient B^n/S^{n-1} pour l'inclusion naturelle $S^{n-1} \hookrightarrow B^n$. Par additivité on trouve $H_i(S^n) \simeq H_{i-1}(S^{n-1})$ et on conclut par récurrence.

Espaces projectifs. On a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et son quotient est une $2n$-sphère

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})/\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \simeq S^{2n}.$$

Par additivité on trouve par récurrence pour $0 \leq i \leq n$.

$$H_{2i}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z} \qquad H_{2i+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0.$$

Plan projectif réel. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est un CW de dimension deux obtenu à partir de S^1 en rajoutant une 2-cellule. L'application de rattachement est ici le revêtement double $S^1 \longrightarrow S^1$. Par additivité appliquée à $S^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dont le quotient est une 2-sphère, on trouve une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \longrightarrow 0.$$

On utilise le fonctorialité de l'opérateur ∂ pour le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^1 & \longrightarrow & B^2, \end{array}$$

qui nous fournit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle \times 2} & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow[id]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ceci montre que $H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 0$ et $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2$.

Da manière générale, si X est un CW fini et si l'on choisit une décomposition cellulaire

$$X_{-1} = \emptyset \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n$$

on construit un complexe, appelé *complexe d'homologie cellulaire de* X, qui dépend du choix de la décomposition en cellules, de la manière suivante. En degré i on dispose du groupe abélien $C_k(X) := H_k(X_k/X_{k-1})$. Comme X_k/X_{k-1} est un bouquet de k-sphères, $C_k(X)$ est un groupe abélien libre de base c_k, l'ensemble des cellules de dimension k dans X.

On construit une différentielle

$$d : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X)$$

en considérant l'application de bord composé à la projection $X_{k-1} \longrightarrow X_{k-1}/X_{k-2}$

$$d : \; H_k(X_k/X_{k-1}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X_{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(X_{k-1}/X_{k-2}) = C_{k-1}(X).$$

Cela définit un complexe (i.e. $d^2 = 0$) et de plus les groupes $H_k(X)$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie de ce complexe

$$H_k(X) \simeq \frac{Ker\,(d : C_k(X) \to C_{k-1}(X))}{Im\,(d : C_{k+1}(X) \to C_k(X))\,.}$$

Attention cependant, le fait qu'il soit nécessaire de choisir une décomposition en cellules implique que le complexe $(C_*(X), d)$ n'est pas fonctoriel en X. Pour étudier l'effet d'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ en cohomologie il est nécessaire, dans la pratique, de choisir des décompositions cellulaires de X et Y qui soient compatibles à travers f.

Enfin, on définit les nombres de Betti.

Définition 3.2 *Pour un CW fini X, ses nombres de Betti sont définis par*

$$b_i(X) := rang(H_i(X)).$$

Exercice. Utiliser les axiomes de théories homologiques pour montrer que la fonction $\chi(X) := \sum_i (-1)^i b_i(X)$ est une caractéristique d'Euler au sens de §2. En déduire que le théorème 3.1 implique le théorème 2.1.

4 Homotopie, homologie et linéarisation

Pour terminer nous donnons une construction d'une théorie homologique. Pour un espace topologique X on considère $\mathbb{Z}[X]$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble sous-jacent à X. La topologie sur X induit une topologie naturelle sur $\mathbb{Z}[X]$. Le foncteur $\mathbb{Z}[X]$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli

$$AbTop \longrightarrow Top$$

des groupes abéliens topologiques vers les espaces topologiques (oubli de la structure de groupe).

On rappelle qu'un espace topologique X muni d'un point de base $x \in X$ possède des invariants d'homotopie

$$\pi_i(X, x) := [S^i, X]$$

qui sont définis comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues pointées de la i-sphère dans X. Pour $i = 0$, $\pi_0(X, x)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X, considéré comme un ensemble pointé par la composante contenant x. Lorsque $i > 0$, les ensembles $\pi_i(X, x)$ sont munis de structures de groupes naturelles. Icelles sont induites par l'application de pincement

$$S^i \longrightarrow S^i/S^{i-1} = S^i \vee S^i$$

induite par l'écrasement de l'équateur S^{i-1} d'une i-sphère. Cette application induit sur S^i une loi de cocomposition dans la catégorie des espaces pointés, qui induit les lois de composition sur les ensembles $\pi_i(X, x)$.

Définition 4.1 *Pour un CW fini X on pose pour tout $i \geq 0$*

$$H_i(X) := \pi_i(\mathbb{Z}[X], 0).$$

Le contenu du théorème de Dold-Thom (voir [Do-Th]) sur l'homotopie des puissances symétriques peut s'interpréter dans notre contexte comme l'énoncé suivant.

Theorème 4.2 (Dold-Thom) *Les foncteurs $X \mapsto H_i(X)$ définissent une théorie homologique.*

Pour aller un peu plus loin, on introduit la catégorie homotopique espaces. Pour cela on rappelle qu'une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

est une *équivalence faible* si pour tout $i \geq 0$ et tout $x \in X$ l'application induite

$$\pi_i(X, x) \longrightarrow \pi_i(Y, f(x))$$

est bijective.

On définit $Ho(Top)$ comme la catégorie obtenue à partir de la catégorie des espaces topologiques en rajoutant des inverses formels aux équivalence faibles. En d'autres termes, $Ho(Top)$ est une catégorie munie d'un foncteur

$$l : Top \longrightarrow Ho(Top)$$

qui est envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes et qui est de plus universel pour cette propriété : pour toute catégorie C et tout foncteur $f : Top \longrightarrow C$ qui envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes il existe une unique factorisation

$$\begin{array}{ccc} Top & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow{\scriptstyle l} & \nearrow_{\exists!} & \\ Ho(Top) & & \end{array}$$

De la même manière, on note $AbTop$ la catégorie des groupes abéliens topologiques. Une équivalence faible dans $AbTop$ est un morphismes de groupes abéliens topologiques qui est une équivalence faible sur les espaces topologiques sous-jacents. On peut alors montrer que l'adjonction

$$\mathbb{Z}[-] : AbTop \leftrightarrows Top : oubli$$

induit une adjonction

$$L\mathbb{Z}[-] : Ho(AbTop) \leftrightarrows Ho(Top) : oubli$$

Attention : le foncteur $L\mathbb{Z}[-]$ ne coincide avec la construction $\mathbb{Z}[-]$ décrite plus haut uniquement sur les CW complexes. En toute généralité si X est un espace quelconque il faut, au préalable, le remplacer par un CW X' qui lui est faiblement équivalent, puis appliquer $\mathbb{Z}[-]$

$$L\mathbb{Z}[X] \simeq \mathbb{Z}[X'].$$

Le conclusion de cette discussion, et le théorème 4.2, nous permet de dire que : *l'homologie est la version linéarisée de l'homotopie*. Ce principe est probablement a attribuer à Quillen, par exemple pour l'introduction de l'homologie des anneaux commutatifs et du complexes cotangent (voir par exemple [Qu, §II-5]). De manière plus moderne, l'homologie au sens généralisée peut aussi se formaliser à l'aide de la notion de stabilisation d'∞-catégorie, comme dans [Lu, §I.1.4].

Références

[Do-Th] Dold, Albrecht ; Thom, René *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte.* Ann. of Math. (2) 67 (1958), 239-281.

[Lu] Lurie, J. *Higher Algebra.* Accessible https ://www.math.ias.edu/ lurie/papers/HA.pdf

[Qu] Quillen, Daniel G. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics, No. 43 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967 iv+156 pp.

[Sp] Spanier, Edwin H. *Algebraic topology.* Corrected reprint of the 1966 original. Springer-Verlag, New York, [1995]. xvi+528