arXiv:math/0509098v3 [math.AG] 18 Nov 2009

Anneaux de Grothendieck des n-champs d'Artin

Bertrand Toën
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, UMR CNRS 5149
Université de Montpellier 2
Case Courrier 051
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex
France
e-mail: btoen@math.univ-montp2.fr

Novembre 2009

Résumé

Nous introduisons un anneau de Grothendieck des champs d'Artin supérieurs qui généralise la notion d'anneau de Grothendieck des variétés. Nous montrons que cet anneau est non trivial en remarquant qu'il factorise l'invariant *nombre de points rationels sur un corps fini*. Dans une seconde partie nous introduisons la notion de *champs spéciaux*, qui ont des groupes d'homotopie π_i affines, et unipotents pour $i > 1$. Notre théorème principal affirme que le morphisme naturel de l'anneau de Grothendieck des variétés vers celui des champs spéciaux induit un isomorphisme après inversion des classes de $\mathbb{A}^1$ et de $\mathbb{A}^i - \{0\}$ pour $i > 0$. Nous déduisons de ceci que de nombreux invariants numériques (nombres de Hodge, caractéristique d'Euler motivique ou l-adique) s'étendent de façon unique en des invariants de champs spéciaux. En particulier, nous obtenons une version de la formule des traces pour les champs d'Artin spéciaux de type fini sur un corps fini, qui identifie le nombre de points rationels à la trace du Frobenius sur la caratéristique d'Euler l-adique à support compact.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Préliminaires sur les n-champs d'Artin **4**
2.1 Rappel des définitions 5
2.2 Gerbes 9
2.3 Représentabilité des faisceaux d'homotopie 12

3 Anneaux de Grothendieck **14**
3.1 Anneau de Grothendieck des champs d'Artin fortement de présentation finie 14
3.2 Nombre de points rationels 19
3.3 Anneau de Grothendieck des champs d'Artin spéciaux 22
3.4 Preuve du théorème 3.10 25
3.5 Invariants numériques des champs d'Artin spéciaux 34

1 Introduction

Les n-champs d'Artin sont des généralisations des 1-champs[1] algébriques au sens de [La-Mo], et qui apparaissent naturellement comme objets représentants certains problèmes de modules qui ne sont (en général) pas représentables par des 1-champs algébriques (voir [To1] pour une introduction plus détaillée). Les bases d'une théorie des n-champs d'Artin sont aujourd'hui établies (voir [Si1] et [HAGII, §2.1]), et plusieurs exemples de tels objets ont été construits (voir par exemple [To-Va]). Il est alors naturel de se poser la question suivante : *Que gagne-t-on à savoir qu'un problème de modules est représentable par un n-champ d'Artin ?* Il existe de nombreuses approches possibles à cette question très générale: on peut par exemple se demander quels sont les invariants algébrico-géométriques définis pour les variétés algébriques que l'on peut étendre en des invariants de n-champs d'Artin. C'est ce que nous ferons dans ce travail, mais en se retreingant aux invariants additifs (e.g. caractéristiques d'Euler, nombre de points sur un corps fini, polynômes de Hodge ...).

Dans le cadre des variétés algébriques (ou plus généralement des schémas de type fini sur un anneau noethérien k), il existe un invariant additif universel qui prend ses valeurs dans un certain anneau de Grothendieck $K(\mathcal{V}(k))$, défini comme le groupe abélien engendré par les classes d'isomorphismes de variétés et en imposant la relation $[X] = [X - Y] + [Y]$ pour toute sous-variété fermée $Y \subset X$ (voir [D-L], voir aussi Def. 3.9 où nous utilisons une relation plus forte lorsque k n'est pas de caractéristique nulle). Dans ce travail nous introduisons un anneau de Grothendieck $K(\mathcal{CH}^{ft}(k))$ des champs d'Artin supérieurs de type fini sur k (voir Def. 3.2). La définition $K(\mathcal{CH}^{ft}(k))$ suit celle pour les variétés mais avec une relation supplémentaire qui trivialise certaines fibrations localement triviales pour la topologie de Zariski (voir Def. 3.2 (3)). Il est à noter que cette nouvelle relation est toujours satisfaite dans le cas des variétés, mais est indispensable pour traiter le cas des champs. Une première observation est que

[1] Par la suite le mot *champ* signifiera un n-champ pour un certain n, et ainsi nous utiliserons l'expression 1-*champ* pour faire référence à la notion usuelle telle qu'exposée dans [La-Mo].

l'anneau $K(\mathcal{CH}^{ft}(k))$ est non-nul. Nous montrons cela lorsque $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini, et en définissant un morphisme d'anneaux

$$\mu : K(\mathcal{CH}^{ft}(k)) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

qui compte le nombre de points rationels en un sens convenable (i.e. en tenant compte de l'existence des groupes d'homotopie supérieurs des champs, voir Prop. 3.5).

Dans une seconde partie nous nous restreignons au cas des champs d'Artin *spéciaux*, qui par définition ont des groupes d'homotopie π_i linéaires et de plus unipotents pour $i > 1$ (voir Def. 3.8). Il se trouve que la classe des champs spéciaux contient déjà de nombreux exemples intéressants, comme par exemple tous les 1-champs d'Artin dont la diagonale est affine, ou encore les champs classifiants des structures linéaires comme le champ $\mathcal{M}_T$ construit dans [To-Va]. Les champs spéciaux jouent aussi un rôle important en théorie de Hogde non-abélienne où ils sont appelés *champs très présentables* (voir [Si2, Si3]). On considérera alors l'anneau de Grothendieck $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$ des champs spéciaux défini de manière analogue à l'anneau $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$. Par construction, il existe un morphisme naturel

$$K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$$

induit par l'incusion des variétés dans les champs d'Artin. Notre théorème principal est le suivant.

Théorème 1.1 *Soit $\mathbb{L} = [\mathbb{A}^1] \in K(\mathcal{V}(k))$ la classe de la droite affine, et $\mathbf{1} := [Spec\, k]$. Notons $K(\mathcal{V}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}]$ l'anneau localisé obtenu en inversant $\mathbb{L}$ ainsi que tous les $\mathbb{L}^i - \mathbf{1}$ pour $i > 0$. Alors, le morphisme induit*

$$K(\mathcal{V}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$$

est un isomorphisme. Ainsi, tout invariant additif de variétés à valeurs dans un anneau A

$$\phi : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow A,$$

tel que $\phi(\mathbb{L})$ et les $\phi(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})$ soient inversibles pour tout $i > 0$, s'étend de façon unique en un invariant additif de champs d'Artin spéciaux

$$K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow A.$$

Ce théorème répond ainsi en partie à la question originale, de savoir quels sont les invariants de variétés qui s'étendent en des invariants de champs d'Artin supérieurs. Sa démonstration repose sur un dévissage des n-champs spéciaux en des pieces élémentaires qui sont ou bien des schémas ou bien des champs de la forme $K(\mathbb{G}_a, n)$ avec $n > 1$, ou bien des 1-champs quotients $[X/Gl_r]$ avec X un espace algébrique muni d'une action du groupe Gl_r. Les prérequis nécessaires pour pouvoir effectuer ces dévissages sont donnés dans les premiers paragraphes.

En corollaire de ce théorème nous obtenons l'existence de nombreux invariants additifs de champs d'Artin spéciaux, tel les nombres de Hodge ou encore les

caractéristiques d'Euler l-adiques et motiviques (voir §3.5). On déduit aussi de ce théorème une version de la formule des traces pour les champs spéciaux, qui identifie le nombre de points rationels sur un corps fini à la trace du Frobenius sur la caractéristique d'Euler l-adique (voir Prop. 3.22).

Deux remarques pour terminer cette introduction. Mise à part l'invariant μ défini dans la proposition 3.2 nous ne construisons pas dans ce travail d'autres invariants définis sur $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$. Cependant, on peut par exemple définir un invariant du type caractéristique d'Euler l-adique qui prolonge celui défini pour les champs spéciaux. Cette construction demande l'existence d'un formalisme l-adique pour les champs supérieurs qui n'est pour le moment pas disponible dans la littérature (voir cependant [Be, L-O] pour le cas des 1-champs, où un tel formalisme est développé). Un travail non publié ([To-Va-Ve]) devrait fournir un formalisme l-adique suffisemment sophistiqué pour permettre la construction d'un tel invariant, et je renvoie donc à ce travail futur où cette question sera probablement traitée.

Par ailleur, la relation (3) de la définition 3.2 de l'anneau de Grothendieck $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$ n'est vraiment justifiée parceque l'on ne s'intéresse par la suite qu'aux champs d'Artin spéciaux. Dans le cas général il serait plus naturel d'utiliser la relation analogue, mais plus forte, valable pour toute F_0-fibration Zariski localement triviale et pour tout champ F_0. Il me semble que lorsque l'on se restreint aux champs spéciaux cela donne un anneau de Grothendieck isomorphe à celui défini dans la définition 3.8. Dans le cas général cela donne un anneau de Grothendieck probablement de taille plus raisonable que celui de notre définition 3.2. Quoiqu'il en soit, l'analogue de notre théorème 1.1 n'est de toute façon pas valable pour des champs d'Artin généraux, et c'est la raison pour laquelle je me suis contenté des définitions 3.2 et 3.8, certes moins naturelles mais certainement plus faciles à manipuler.

Remerciements: Je remercie M. Vaquié et G. Vezzosi pour plusieurs discussions sur la notion d'invariants additifs de champs supérieurs qui m'ont motivé pour écrire ce texte. Je remercie aussi J. Schürmann pour m'avoir signalé une erreur dans une première version de ce travail.

Conventions et notations: Tout au long de ce travail k sera un anneau (associatif, commutatif et unitaire) noethérien.

2 Préliminaires sur les n-champs d'Artin

Dans cette première section, nous rappelons quelques définitions sur les champs n-géométriques au sens de [HAGII, §2.1], et nous en donnons quelques exemples élémentaires. Nous introduisons aussi la notion de gerbes et de gerbes totales, qui sont des analogues supérieurs de la notion usuelle de gerbes. Un résultat

clé pour la suite est que tout n-champ d'Artin fortement de présentation finie possède une stratification par des gerbes totales. Nous utiliserons la définition de champs d'Artin basée sur la topologie fppf, et dont les atlas sont des atlas plats et de présentation finie. Cette notion, qui diffère à priori de la notion de champs d'Artin basée sur la topologie étale et atlas lisse (telle que présentée dans [Si1, HAGII]), lui est en réalité équivalente (voir [To3]). L'utilisation de la topologie plate, qui suppose implicitement les résultats de [To3], simplifiera les énoncés de dévissages en gerbes que nous allons présenter de ce paragraphe.

2.1 Rappel des définitions

Rappelons que $k - Aff^{\sim,fppf}$ désigne la catégorie de modèles des préfaisceaux simpliciaux sur le site des k-schémas affines munie de la topologie fidèlement plate et de présentation finie (*fppf* pour faire court). On rappelle que les équivalences sont les équivalences locales (e.g. les morphismes induisant des isomorphismes sur tous les faisceaux d'homotopie, pour la topologie $fppf$), et que l'on utilise la structure projective décrite dans [Bl] (voir aussi [HAGI]). Nous passerons sous silence les histoires d'univers, et l'on renvoit à [HAGII] pour plus de détails. La catégorie homotopique $St(k)$ est simplement appelée *la catégorie des champs*, et ses objets seront appelés des *champs*. Les ensembles de morphismes dans $St(k)$ seront notés $[-,-]$. De même un morphisme de champs sera toujours un morphisme dans $St(k)$. Plus précisément, nous dirons qu'un champ F est un *n-champ*, si pour tout $i > n$, tout $X \in k - Aff$ et tout $x \in F(X)$, le faisceau $fppf$ en groupes $\pi_i(F,x)$, associé au préfaisceau

$$\begin{array}{rccc} \pi_i^{pr}(F,x): & k - Aff/X & \longrightarrow & Gp \\ & (f: Y \to X) & \mapsto & \pi_i(F(Y), f^*(x)), \end{array}$$

est trivial. Comme il est expliqué dans [HAGI], la sous-catégorie pleine de $St(k)$ formée des 0-champs est naturellement équivalente à la catégorie $Sh(k - Aff)$ des faisceaux en ensembles sur $k - Aff$. Le plongement de Yoneda $k - Aff \longrightarrow Sh(k - Aff)$ permet donc d'identifier la catégorie $k - Aff$ avec une sous catégorie pleine de $St(k)$. Par la suite, nous fairons cette identification de façon implicite.

Pour un objet $F \in St(k)$ nous noterons (en faisant un abus de notation) $F(A) \in SEns$ la valeur d'un remplacement fibrant de F sur A. En d'autres termes on peut écrire

$$F(A) \simeq Map(Spec\, A, F),$$

où le Map est calculé dans la catégorie de modèles $k - Aff^{\sim,fppf}$ (noter que ce que nous notons $F(A)$ est noté $\mathbb{R}F(A)$ dans [HAGII]). Ceci signifie simplement que nous prenons soins de toujours effectuer un remplacement fibrant (i.e. de passer au champ associé) avant d'évaluer en un point A.

Nous dirons de manière équivalente que deux champs F et F' sont *équivalents* ou bien qu'ils sont *isomorphes dans* $St(k)$.

Avant de passer aux champs géométriques signalons que la catégorie $k - Aff^{\sim,fppf}$ est un *topos de modèles*, au sens de [HAGI]. Ainsi, bien que la

catégorie des champs $St(k)$ ne soit pas un topos (par exemple elle ne possède pas de limites), on dispose tout de même d'analogues homotopiques du comportement bien connu des faisceaux. Par exemple, l'existence de limites et de colimites homotopiques, les notions de monomorphismes (ceux qui induisent des monomorphismes sur les faisceaux π_0 et des isomorphismes sur tous les π_i pour $i > 0$) et d'épimorphismes (ceux qui induisent des épimorphismes de faisceaux sur les faisceaux π_0), d'effectivité de certains quotients .... On renvoit à [HAGI] où le lecteur pourra trouver des précision sur cette notion de topos de modèles.

Les produits fibrés homotopiques dans $St(k)$ seront notés $F \times^h_G H$.

La définition des champs géométriques procède par la récurrence suivante.

- Un champ est (-1)-géométrique si c'est un schéma affine.
- Un morphisme de champs $F \longrightarrow G$ est (-1)-représentable si pour tout $X \in k - Aff$, et tout morphisme de champs $X \longrightarrow G$, le champ $F \times^h_G X$ est (-1)-géométrique. Un tel morphisme est plat de présentation finie si de plus le morphisme induit $F \times^g_G X \longrightarrow X$ est un morphisme plat et de présentation finie entre schémas affines.
- Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons que pour tout $m < n$ la notion de champs m-géométriques soit définie, ainsi que la notion de morphismes m-représentables et de morphismes m-représentables plats et de présentation finie.
  - Un champ F est n-géométrique s'il vérifie les deux conditions suivantes.
    - Le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times F$ est $(n-1)$-représentable.
    - Il existe des schémas affines X_i et un épimorphisme de champs (i.e. dont le morphisme induit sur les faisceaux π_0 soit un épimorphisme de faisceaux d'ensembles)

      $$p : \coprod X_i \longrightarrow F,$$

      tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow F$ (qui est $(n-1)$-représentable par la première condition sur la diagonale) soit plat et de présentation finie. Un tel morphisme p est appelé un *n-atlas*, ou simplement un atlas si l'on ne souhaite pas spécifier n.
  - Un morphisme $F \longrightarrow G$ est n-représentable si pour tout $X \in k-Aff$, et tout morphisme de champs $X \longrightarrow F$, le champ $F \times^h_G X$ est n-géométrique.
  - Un morphisme n-représentable $F \longrightarrow G$ est lisse si pour tout $X \in k - Aff$ et tout morphisme de champs $X \longrightarrow F$, il existe un n-atlas

    $$\coprod X_i \longrightarrow F \times^h_G X,$$

tel que chacun des morphismes de schémas

$$X_i \longrightarrow X$$

soit plat et de présentation finie.

Il est démontré dans [HAGII] que la notion de champs n-géométriques se comporte comme on le souhaite. Par exemple, la sous-catégorie des champs n-géométriques est stable par produits fibrés homotopiques, et être n-géométrique est une propriété locale pour la topologie fppf.

Il est important de noter qu'un champ F qui est n-géométrique est automatiquement un n-champ (voir [HAGII]). En contre partie, un n-champ F peut tout à fait être m-géométrique pour $m > n$, et ne pas être n-géométrique. Ainsi, la complexité géométrique est toujours supérieure à la complexité homotopique, et peut-être strictement plus grande. Par exemple, un faisceau représentable par un schéma sans aucune hypothèse de séparation est un champ 1-géométrique mais pas 0-géométrique en général. Nous adopterons ainsi la définition suivante.

Définition 2.1 *Un* n-champ d'Artin *est un n-champ qui est m-géométrique pour un certain entier m. Un* champ d'Artin *est un champ qui est un n-champ d'Artin pour un certain entier n.*

Le théorème principal de [To3] affirme que la notion précédente de n-champs d'Artin coincide avec celle présentée dans [Si1, HAGII]. On voit ainsi aisément qu'un faisceau sur $k - Aff$ est représentable par un espace algébrique si et seulement si c'est un 0-champ d'Artin au sens de la définition ci-dessus.

Tout comme il est expliqué dans [HAGII], toute propriété $\mathbf{Q}$ de morphismes dans $k - Aff$ qui est locale pour la topologie fppf, s'étent de façon naturelle en une propriété de morphismes entre n-champs d'Artin. Ainsi peut-on parler de morphismes plats. Pour parler de morphismes lisses il est préférable d'utiliser l'existence d'atlas lisses. Nous dirons ainsi qu'un morphisme de n-champs d'Artin $f : F \longrightarrow G$ est lisse, s'il existe des atlas lisses $U = \coprod_i U_i \to F$ et $V = \coprod_i V_i \to G$, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & F \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \longrightarrow & G, \end{array}$$

avec g lisse.

Rappelons aussi qu'un morphisme de champs $f : F \longrightarrow G$ est un monomorphisme, si le morphisme naturel

$$F \longrightarrow F \times^h_G F$$

est un isomorphisme dans $St(k)$. De manière équivalente f induit un monomorphisme sur les faisceaux π_0 et des isomorphismes sur tous les faisceaux π_i pour $i > 0$ (et tout choix de point de base). On définit alors les immersions ouvertes comme étant les monomorphismes lisses. Les immersions fermées sont définies directement comme les morphismes $f : F \longrightarrow G$ tels que pour tout $X \in k-Aff$, et tout morphisme $X \longrightarrow G$, le morphisme $F \times^h_G X \longrightarrow X$ soit une immersion fermée de schémas affines.

Rappelons aussi les conditions de finitudes suivantes.

- Un champ F est *quasi-compact* s'il existe un schéma affine X et un épimorphisme de champs $X \longrightarrow F$.
- Un champ 0-géométrique (i.e. un schéma affine) est *fortement quasi-compact*.
- Un morphisme 0-représentable $F \longrightarrow G$ est *fortement quasi-compact*.
- Par récurrence sur n, si F est un champ n-géométrique, nous dirons que F est *fortement quasi-compact* si les deux conditions suivantes sont satifaites.
  - Le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times F$ est fortement quasi-compact.
  - Le champ F est quasi-compact.
- Par récurrence sur n, nous dirons qu'un morphisme n-représentable $F \longrightarrow G$ est *fortement quasi-compact* si pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow F$, le champ n-géométrique $F \times^h_G X$ est fortement quasi-compact.
- Un champ d'Artin F est *localement de présentation fini* s'il existe un n-atlas $\coprod X_i \longrightarrow F$ où chaque X_i est un schéma affine de présentation finie sur $Spec\, k$.
- Un champ d'Artin F est *fortement de présentation fini* s'il est localement de présentation fini et fortement quasi-compact.

Terminons cette première section par les touts premiers exemples de champ d'Artin, les champs classifiants. Si G est un schéma en groupes abéliens de présentation finie et plat sur $Spec\, k$, alors on peut définir un préfaisceau simplicial

$$\begin{array}{rccc} K(G,n): & k-Alg & \longrightarrow & SEns \\ & A & \mapsto & K(G(A),n), \end{array}$$

où comme d'habitude $K(H,n)$ est un ensemble simplicial dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux sauf $\pi_n(K(H,n)) \simeq H$. Cet objet est un préfaisceau simplicial et sera donc considéré comme objet dans $St(k)$. Il est facile de voir que $K(G,n)$ est un n-champ d'Artin, plat et fortement de présentation finie sur $Spec\, k$. Le champ $K(G,n)$ est de plus lisse sur $Spec\, k$ dès que $n > 0$, car le point global $* \longrightarrow K(G,n)$ est un atlas plat et de présentation: $K(G,n)$ est

donc localement pour la topologie $fppf$ lisse sur $Spec\, k$, et est donc lisse sur $Spec\, k$.

Pour tout k-schéma X, on dispose d'isomorphismes naturels

$$[X, K(G,n)] \simeq H^n_{fppf}(X, G).$$

Ainsi, d'après les résultats de [To3], on a

$$[X, K(G,n)] \simeq H^n_{et}(X, G)$$

dès que G est lisse.

Enfin, lorsque G n'est plus nécessairement abélien on dispose tout de même du 1-champ classifiant $K(G,1)$, qui est lisse sur $Spec\, k$.

2.2 Gerbes

Soit $F \in St(k)$ un champ, et considérons $\pi_0(F)$ le faisceau (pour la topologie fppf) associé au préfaisceau $X \mapsto \pi_0(F(X))$.

Définition 2.2 *Le* faisceau des modules grossier *du champ F est le faisceau $\pi_0(F)$. Nous le noterons $M(F)$.*

La notion de gerbe que l'on trouve dans la littérature est variée, et elle diffère suivant les contextes. Nous adopterons la terminologie suivante.

Définition 2.3 *Un champ F est une* gerbe *si les trois conditions suivantes sont satisfaites*

1. *Le champ F est un champ d'Artin fortement de présentation finie.*
2. *Le faisceau $M(F)$ est espace algébrique (i.e. un 0-champ d'Artin).*
3. *Le morphisme naturel $F \longrightarrow M(F)$ est plat.*

Nous insistons sur le fait qu'une gerbe sera toujours pour nous un champ d'Artin fortement de présentation finie, ce qui n'est pas un terminologie tout à fait standard.

Nous rappelons que pour un champ F, on définit le champ d'inertie I_F (aussi appelé le champ des lacets) par

$$I_F := \underline{Map}(S^1, F) \simeq F \times^h_{F \times F} F,$$

où S^1 est le champ associé au préfaisceau simplicial constant égal au cercle simplicial $S^1 := \Delta^1/\partial\Delta^1$, et où $\underline{Map}$ désigne le Hom interne de la catégorie homotopique des champs. Le choix d'un point de base $* \in S^1$ définit une projection naturelle

$$I_F \longrightarrow F,$$

qui peut aussi se voir comme l'une des deux projections

$$F \times^h_{F\times F} F \longrightarrow F.$$

Avec ces notations, le résultat fondamental est le critère suivant, bien connu pour les 1-champs d'Artin (voir par exemple [La-Mo]).

Proposition 2.4 *Un champ d'Artin F est une gerbe si et seulement s'il est fortement de présentation finie et si de plus le morphisme naturel*

$$I_F \longrightarrow F$$

est plat.

Preuve: C'est la même que pour le cas $n = 1$ traité dans [La-Mo]. Résumons-la brièvement.

Commençons par voir que la condition est nécessaire. Pour cela on remarque que le fait que $I_F \longrightarrow F$ soit plat est une condition locale pour la topologie plate de présentation finie sur $M(F)$. On peut donc supposer par changement de base que $M(F) = Spec\, k$, et même que la projection naturelle $F \longrightarrow M(F) = Spec\, k$ possède une section, $x : Spec\, k \longrightarrow F$. Soit $U \longrightarrow F$ un morphisme fidèlement plat avec U un schéma affine (par exemple un atlas). Comme $M(F) = Spec\, k$ on peut, quitte à prendre un recouvrement plat de U, supposer que le morphisme $U \longrightarrow F$, se factorise par le point x

$$U \longrightarrow Spec\, k \longrightarrow F.$$

Alors, comme $U \longrightarrow F$ et $U \longrightarrow Spec\, k$ sont plats, on en déduit que $x : Spec\, k \longrightarrow F$ est un morphisme plat. Ainsi, le champ des lacets en x

$$\Omega_x F := Spec\, k \times^h_F Spec\, k$$

est un champ plat sur $Spec\, k$. Or, il existe un diagramme homotopiquement cartésien de champs

$$\begin{array}{ccc} \Omega_x F & \longrightarrow & Spec\, k \\ \downarrow & & \downarrow x \\ I_F & \longrightarrow & F. \end{array}$$

Comme le morphisme $x : Spec\, k \longrightarrow F$ est fidèlement plat, ceci implique bien que le morphisme $I_F \longrightarrow F$ est plat.

Supponsons maintenant que F soit un n-champ d'Artin fortement de présentation finie et que $I_F \longrightarrow F$ soit plat. Soit $X_0 \longrightarrow F$ un atlas de F (par quasi-compacité on prendra X_0 un schéma affine), et considérons

$$f : X_1 := X_0 \times^h_F X_0 \longrightarrow X_0 \times X_0.$$

On note R le sous-faisceau de $X_0 \times X_0$ image du morphisme f. C'est le graphe d'une relation d'équivalence sur X_0, et on a un isomorphisme de faisceaux $M(F) \simeq X_0/R$. Pour montrer que $M(F)$ est un espace algébrique il nous faut donc montrer les deux assertions suivantes:

1. Le faisceau R est représentable par un espace algébrique localement de présentation finie.

2. Le morphisme $R \subset X_0 \times X_0 \longrightarrow X_0$ est plat.

Pour commencer, le morphisme diagonal $R \longrightarrow R \times R$ est un morphisme représentable affine car R est un sous-faisceau d'un schéma affine. On considère de plus le morphisme surjectif

$$X_1 \longrightarrow R.$$

Pour tout schéma affine S, et tout morphisme $S \longrightarrow R$, on dispose de deux morphismes induits $x : S \longrightarrow F$ et $y : S \longrightarrow F$, ou encore de deux points x et y dans $F(S)$. Le produits fibré homotopique $X_1 \times^h_R S$ s'identifie, en tant que champ sur S, au champ des chemins de x à y

$$X_1 \times^h_R S \simeq S \times^h_F S =: \Omega_{x,y}F \longrightarrow S.$$

Le champ $\Omega_{x,y}F$ est localement non vide pour la topologie fppf sur S (car x et y proviennent d'un morphisme $S \longrightarrow R$). Ainsi, le champ $\Omega_{x,y}F$ est localement équivalent pour la topologie fppf sur S au champ $\Omega_x F$, des lacets en x. Par hypothèse sur F, le champ $\Omega_x F$ est plat de présentation finie sur S, et ainsi on voit que la projection

$$X_1 \times^h_R S \longrightarrow S$$

est un morphisme plat de présentation finie. Comme ceci est valable pour tout schéma affine S et tout morphisme $S \longrightarrow R$, on voit que le morphisme de champs

$$X_1 \longrightarrow R$$

est surjectif, plat et de présentation finie. En composant avec un atlas pour X_1 on trouve donc un atlas pour R.

Il nous reste à montrer que la première projection $R \subset X_0 \times X_0 \longrightarrow X_0$ est un morphisme plat et de présentation finie. Mais, on dispose d'un diagramme commutatif de champs

$$\begin{array}{ccc} X_1 & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \searrow^{s} & \\ R & \xrightarrow[q]{} & X_0, \end{array}$$

et comme s et p sont plats de présentation finie et surjectifs il en est de même de q. Ceci termine la preuve que le faiscau π_0 est représentable par un espace algébrique de présentation finie, qui est le quotient X_0/R. De plus, on dispose d'un diagramme commutatif de champs

$$\begin{array}{ccc} X_0 & & \\ {\scriptstyle b}\downarrow & \searrow^{a} & \\ F & \xrightarrow[\pi]{} & M(F), \end{array}$$

avec a et b plats et surjectifs. Ainsi, le morphisme π est lui-même plat. □

Corollaire 2.5 *Soit F un champ d'Artin fortement de présentation fini. Alors F admet une stratification par des sous-champs localement fermés qui sont des gerbes réduites. En d'autres termes, il existe une suite finie de sous-champs fermés*

$$\emptyset = F_{r+1} \subset F_r \subset \cdots \subset F_1 \subset F_0 = F$$

tel que chaque champ $F_i - F_{i+1}$ soit une gerbe réduite.

Preuve: En posant $F_1 := F_{red}$ on se ramène immédiatement au cas où F est réduit. Comme k est noethérien les champs fortement de présentation finie sont noethériens (i.e. toute chaine décroissante de sous-champs fermés est stationaire). Ainsi, par récurrence noethérienne il nous suffit de voir que pour tout champ d'Artin fortement de présentation fini et réduit F, il existe un sous-champ ouvert $U \subset F$ tel que le champ d'inertie

$$I_U \simeq I_F \times_F^h U \longrightarrow U$$

soit plat. Mais ceci se déduit aisément de la platitude générique pour les schémas affines qui s'étend sans problèmes aux champs d'Artin. □

On peut être plus précis au sujet du corollaire 2.5, en remarquant que tout stratification de F par des sous-champs localement fermés peut être rafinée en une stratification par des gerbes réduites. De plus, deux telles stratifications par des gerbes réduites peuvent être rafinées par une même troisième.

2.3 Représentabilité des faisceaux d'homotopie

Soit F une gerbe réduite. On rappelle que pour tout schéma X et tout morphisme $x : X \longrightarrow F$, on dispose de faisceaux en groupes $\pi_i(F, x)$ sur X.

Proposition 2.6 *Pour toute gerbe réduite F, il existe un ouvert non-vide U de F, tel que pour tout schéma X affine, tout morphisme $x : X \longrightarrow U$ et tout entier $i > 0$, le faisceau $\pi_i(F, x)$ soit représentable par espace algébrique en groupes plat et de type fini sur X.*

Preuve: On raisone par récurrence sur un entier n tel que F soit un n-champ d'Artin.

Lorsque $n = 1$, pour tout schéma X et tout morphisme $x : X \longrightarrow F$ on a un isomorphisme de faisceaux sur X

$$\pi_1(F, x) \simeq I_F \times_F^h X.$$

Comme le morphisme $I_F \longrightarrow F$ est représentable de type fini, ceci implique que $\pi_1(F, x)$ est n-représentable (pour un certain n) par un espace algébrique de type fini. De plus, la proposition 2.4 implique que $\pi_1(F, x)$ est plat sur X. Ainsi, dans ce cas on peut prendre $U = F$.

Supposons maintenant que $n > 1$, et supposons la proposition démontrée pour tous les m-champs d'Artin pour $m < n$. Notons $M = M(F)$ l'espace de modules de F. Soit X un schéma affine, et $x : X \longrightarrow F$ un atlas lisse. Le champ F étant un n-champ d'Artin, le faisceau $\pi_n(F, x)$ s'identifie au n-ème champ des lacets $\Omega_x^{(n)} F$ (on rappelle que l'on a par définition $\Omega_x^{(n)} F = \Omega_e \Omega_x^{(n-1)} F$, où e est le point distingué de $\Omega_x^{(n-1)} F$ correspondant au lacet constant en x). Ceci implique que $\pi_n(F, x)$ est représentable par un espace algébrique sur X. Soit X' un ouvert non-vide de X tel que $\pi_n(F, x)$ soit de plus plat sur X (un tel ouvert existe car F, et donc X est réduit). L'image F' du morphisme $X' \longrightarrow F$ est alors un sous-champ ouvert qui est tel que pour tout schéma Y et tout morphisme $y : Y \longrightarrow F'$, le faisceau $\pi_n(F, y)$ est représentable par un espace algébrique plat et de type fini sur Y. On considère maintenant le morphisme de troncation (voir [HAGI])

$$F \longrightarrow \tau_{\leq n-1} F.$$

Pour tout schéma X et tout morphisme $z : X \longrightarrow \tau_{\leq n-1} F$, le morphisme $F \times^h_{\tau_{\leq n-1} F} X \longrightarrow X$ est localement (pour la topologie fppf) sur X équivalent à un morphisme de la forme $K(\pi_n(F, x), n) \longrightarrow X$, pour un point x qui relève z. Or, le champ $K(\pi_n(F, x), n)$ est un n-champ d'Artin, et de plus le morphisme $K(\pi_n(F, x), n) \longrightarrow X$ est un morphisme lisse. Ceci montre que le champ $F \times^h_{\tau_{\leq n-1} F} X$ est un n-champ d'Artin (voir [HAGII, Prop. 1.3.3.4]), et donc que morphisme

$$F \longrightarrow \tau_{\leq n-1} F$$

est m-représentable (pour un certain $m \geq n$) lisse, fortement de présentation finie, et surjectif. En composant avec un atlas pour F on trouve donc un atlas pour $\tau_{\leq n-1} F$, ce qui montre que $\tau_{\leq n-1} F$ est un $(n-1)$-champ d'Artin. Comme F est de plus un champ d'Artin fortement de présentation finie, ceci implique que $\tau_{\leq n-1} F$ est aussi un champ d'Artin fortement de présentation finie.

Le $(n-1)$-champ d'Artin $\tau_{\leq n-1} F$ est alors lui-même une gerbe. En effet, on a $M(\tau_{\leq n-1} F) = M(F)$. De plus, comme les morphismes $F \longrightarrow \tau_{\leq n-1} F$ et $F \longrightarrow M(F)$ sont tous deux fidèlement plats, il en est de même du morphisme

$$\tau_{\leq n-1} F \longrightarrow M(\tau_{\leq n-1} F) = M(F).$$

Ainsi, par induction on sait qu'il existe un sous-champ ouvert V de $\tau_{\leq n-1} F$ qui satisfait aux conditions de la proposition pour $\tau_{\leq n-1} F$. L'image inverse de cet ouvert par le morphisme $F \longrightarrow \tau_{\leq n-1} F$ est le sous-champ ouvert cherché. □

Au vu de la proposition précédente nous introduisons la définition suivant.

Définition 2.7 *Un champ F est une* gerbe totale *si c'est une gerbe, et si de plus pour tout schéma affine X, tout morphisme $x : X \longrightarrow F$ et tout entier $i > 0$, le faisceau $\pi_i(F, x)$ est représentable par un espace algébrique plat sur X.*

De la proposition 2.6 et par récurrence noethérienne on tire le corollaire important suivant.

Corollaire 2.8 *Soit F un champ d'Artin fortement de présentation fini. Alors F admet une stratification par des sous-champs localement fermés qui sont des gerbes totales réduites. En d'autres termes, il existe une suite finie de sous-champs fermés*

$$\emptyset = F_{r+1} \subset F_r \subset \cdots \subset F_1 \subset F_0 = F$$

tel que chaque champ $F_i - F_{i+1}$ soit une gerbe totale réduite.

Le corollaire 2.8 possède la conséquence important suivante.

Corollaire 2.9 *Soit F un champ d'Artin fortement de présentation finie, X un schéma affine réduit, et et $x : X \longrightarrow F$ un morphisme. Alors, il existe un ouvert non-vide U de X, tel que pour tout $i > 0$, le faisceau en groupes $\pi_i(F, x_{|U})$ (défini sur $k - Aff/U$) soit représentable par un espace algébrique en groupes plat et de type fini sur U. En particulier, si $X = Spec\, K$ est le spectre d'un corps, alors pour tout $i > 0$ le faisceau $\pi_i(F, x)$ est représentable par un schéma en groupes de type fini sur K.*

3 Anneaux de Grothendieck

Nous définirrons dans cette section deux anneaux de Grothendieck, un premier pour les champs d'Artin fortement de présentation finie et un second pour les champs d'Artin spéciaux.

3.1 Anneau de Grothendieck des champs d'Artin fortement de présentation finie

Nous commencerons par quelques définitions.

Définition 3.1 *1. Un morphisme $f : F \longrightarrow F'$ de champs d'Artin est une* g-équivalence *si pour tout corps algébriquement clos K, le morphisme $F(K) \longrightarrow F'(K)$ est une équivalence.*

2. Soit F_0 un champ. Nous dirons qu'un morphisme de champs

$$F \longrightarrow F'$$

*est une F_0-*fibration Zariski localement triviale *si pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \longrightarrow F'$, il existe un recouvrement Zariski $\{U_i\}$ de X, tel que chaque morphisme*

$$F \times^h_{F'} U_i \longrightarrow U_i$$

soit isomorphe au-dessus de U_i à la projection naturelle

$$F_0 \times U_i \longrightarrow U_i.$$

Notons maintenant $\mathcal{CH}^{tf}(k)$ la sous-catégorie pleine de $St(k)$ formée des champs d'Artin fortement de présentation finie sur k. On considère le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)]$ engendré par les classes d'isomorphismes de $\mathcal{CH}^{tf}(k)$. Comme il en est l'usage nous noterons $[F] \in \mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)]$ la classe d'un champ d'Artin F.

Définition 3.2 *Le* groupe de Grothendieck des champs d'Artin *est le quotient de* $\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)]$ *par les trois relations suivantes.*

1. *Pour* F *et* F' *dans* $\mathcal{CH}^{tf}(k)$ *on a*
$$[F \coprod F'] = [F] + [F'].$$
2. *Pour toute g-équivalence* $F \longrightarrow F'$ *dans* $\mathcal{CH}^{tf}(k)$*, on a*
$$[F] = [F'].$$
3. *Soit* F_0 *un champ qui est soit un schéma affine, soit un champ de la forme* $K(\mathbb{G}_a, n)$ *pour un entier* $n > 0$*. Si* $F \longrightarrow F'$ *dans* $\mathcal{CH}^{tf}(k)$ *est une* F_0*-fibration Zariski localement triviale, alors on a*
$$[F] = [F' \times F_0].$$

Ce groupe sera noté $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$.

On munit aussi $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$ d'une structure d'anneau commutatif en posant

$$[F].[F'] := [F \times F'],$$

et en vérifiant que ceci est compatible aux relations précédentes.

Une remarque importante au sujet de la définition précédente: toute fibration en $K(\mathbb{G}_a, n)$ qui est localement triviale pour la topologie fppf est en réalité une $K(\mathbb{G}_a, n)$-fibration Zariski localement triviale. De façon plus précise, si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme de n-champs d'Artin fortement de présentation finie, tel qu'il existe un schéma affine X et un morphisme fièlement plat de présentation finie $X \longrightarrow F'$ avec $F \times_{F'} X$ équivalent (comme champ sur X) à $X \times K(\mathbb{G}_a, n)$, alors f est une $K(\mathbb{G}_a, n)$-fibration Zariski localement triviale. En effet, pour voir cela il suffit de supposer que F' est un schéma affine Y. Le champ A des auto-équivalences de $K(\mathbb{G}_a, n)$ s'inscrit dans une diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{G}_a, n) & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ Spec\, k & \longrightarrow & \mathbb{G}_m. \end{array}$$

Le champ A, comme champ en groupes, est même équivalent au produit semi-direct de $\mathbb{G}_m$ par $K(\mathbb{G}_a, n)$. Ainsi, le champ classifiant des fibrations en $K(\mathbb{G}_a, n)$ localement triviale pour la topologie fppf, qui n'est autre que $K(A, 1)$, s'inscrit lui dans une diagramme homotopiquement cartsien

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{G}_a, n+1) & \longrightarrow & K(A,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Spec\, k & \longrightarrow & K(\mathbb{G}_m, 1). \end{array}$$

Le morphisme $f : F \longrightarrow Y$ entre alors dans un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & K(\mathbb{G}_m, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[u]{} & K(A,1). \end{array}$$

Maintenant, en utilisant Hilbert 90, le morphisme u se factorise, localement pour la topologie de Zariski sur Y, en un morphisme $Y \longrightarrow K(\mathbb{G}_a, n+1)$. Ce dernier morphisme correspond à $u \in H^{n+1}_{fppf}(Y, \mathbb{G}_a)$, qui est donc nul localement pour la topologie Zariski sur Y car $\mathbb{G}_a$ est le faisceau additif sous-jacent d'un faisceau cohérent. En conclusion on voit que le morphisme $u : Y \longrightarrow K(A, 1)$ est localement trivial pour la topologie Zariski sur Y, ou de manière équivalente que $F \longrightarrow Y$ est une $K(\mathbb{G}_a, n)$-fibration Zariski localement triviale. Ce fait remarquable sera utilisé implicitement par la suite.

Lorsque k est de caractéristique nulle la notion de g-équivalence se simplifie, et le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$ possède alors une présentation plus proche de la définition usuelle du groupe de Grothendieck des variétés (tel que définis dans [D-L]).

Proposition 3.3 *Supposons que k soit de caractéristique nulle. Alors le groupe $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)]$ par les trois relations suivantes.*

1. *Pour F et F' dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$ on a*
$$[F \coprod F'] = [F] + [F'].$$
2. *Pour tout F dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$, et tout sous-champ fermé $F_0 \subset F$, d'ouvert complémentaire $F - F_0$, on a*
$$[F] = [F_0] + [F - F_0].$$
3. *Soit F_0 un champ qui est soit un schéma affine, soit un champ de la forme $K(\mathbb{G}_a, n)$ pour un entier $n > 0$. Si $F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$ est une F_0-fibration Zariski localement triviale, alors on a*
$$[F] = [F' \times F_0].$$

Preuve: Notons $K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$ le groupe défini par les relations de la proposition. On dispose d'un morphisme évident

$$\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)] \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{tf}(k)).$$

De plus, pour F dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$, et tout sous-champ fermé $F_0 \subset F$, le morphisme

$$F_0 \coprod F - F_0 \longrightarrow F$$

est une g-équivalence. Ceci implique que le morphisme ci-dessus induit un morphisme

$$K'(\mathcal{CH}^{tf}(k)) \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{tf}(k)).$$

Pour montrer que cet un isomophisme, il suffit de montrer que le morphisme évident

$$\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)] \longrightarrow K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$$

se factorise par $K(\mathcal{CH}^{tf}(k))$, car cela permet de construire un inverse

$$K(\mathcal{CH}^{tf}(k)) \longrightarrow K'(\mathcal{CH}^{tf}(k)).$$

Pour cela il suffit de voir que toute g-équivalence $f : F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$, on ait $[F] = [F']$ dans $K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$.

Lemme 3.4 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ une g-équivalence entre champs d'Artin réduits dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$. Alors il existe un sous-champ ouvert non-vide $V \subset F'$, tel que le morphisme induit*

$$F \times^h_{F'} V \longrightarrow V$$

soit un isomorphisme dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$.

Preuve du lemme: Soit $X' \longrightarrow F'$ un atlas avec X' un schéma affine réduit. On considère le diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & F'. \end{array}$$

Par hypothèse sur f, pour tout corps algébriquement clos K, le morphisme $X(K) \longrightarrow X'(K)$ est un équivalence, et en particulier $X(K)$ est homotopiquement discret (i.e. équivalent à un ensemble). Montrons que cela implique que X est un espace algébrique. Pour cela nous montrerons plus généralement qu'un champ n-géométrique Y, fortement de présentation finie, et tel que $Y(K)$ soit (homotopiquement) discret pour tout corps algébriquement clos K, est un espace algébrique. Ceci se démontre par induction sur n comme suit. Soit Y_* un groupoide de Segal représentant Y, avec Y_0 un schéma, et Y_1 un champ $(n-1)$-géométrique lisse sur Y_0 (voir [HAGII]). Comme K est algébriquement clos, le morphisme

$$Y_0(K) \longrightarrow Y(K)$$

est surjectif à homotopie près, et donc $Y(K)$ s'écrit comme la réalisation géométrique de $Y_*(K)$

$$Y(K) \simeq |Y_*(K)|.$$

Comme l'ensemble simplicial $Y_0(K)$ est discret, les fibres homotopiques du morphisme

$$Y_1(K) \longrightarrow Y_0(K) \times Y_0(K)$$

sont équivalentes aux espaces de chemins de $Y(K)$, et sont donc ou bien vides ou bien contractiles. En d'autres termes, $Y_1(K)$ est lui-même discret et le morphisme

$$Y_1(K) \longrightarrow Y_0(K) \times Y_0(K)$$

est un monomorphisme. Ceci étant valide pour tout corps algébriquement clos K, par récurrence on déduit que Y_1 est un espace algébrique réduit. Les fibres géométriques du morphisme

$$Y_1 \longrightarrow Y_0 \times Y_0$$

sont ou bien vide, ou bien des torseurs sous des schémas en groupes. Comme k est de caractéristique nulle ces fibres géométriques sont donc réduites, et même des spectres de corps car elles possèdent au plus un point fermé. Ainsi, on voit que le morphisme $Y_1 \longrightarrow Y_0 \times Y_0$ est non ramifié. Comme il est de plus injectif sur les points géométriques il s'agit d'un monomorphisme. Ainsi, le champ Y, qui est le quotient du groupoide de Segal Y_*, est un espace algébrique car quotient de Y_0 par la relation d'équivalence lisse $Y_1 \longrightarrow Y_0 \times Y_0$.

Revenons à la preuve du lemme et à notre diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & F'. \end{array}$$

Nous savons maintenant que X est un espace algébrique réduit, et aussi que le morpisme $X \longrightarrow X'$ induit un bijection $X(K) \longrightarrow X'(K)$ pour tout corps algébriquement clos K. Comme nous sommes en caractéristique nulle, on sait qu'il existe un ouvert non-vide U de X', tel que le morphisme induit

$$X \times^h_X U \longrightarrow U$$

soit un isomorphisme. L'image V de cet ouvert dans F' vérifie clairement les conditions du lemme. □

Revenons à la preuve de la proposition. Il il suffit de voir que toute g-équivalence $f : F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{CH}^{tf}(k)$, on ait $[F] = [F']$ dans $K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$. Tout d'abord, comme $F_{red} : F_{red} \longrightarrow F'_{red}$ est encore une g-équivalence, et que $[F_{red}] = [F]$, $[F'_{red}] = [F']$ dans $K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$, on peut supposer F et F' réduits. On remarque aussi que la retriction de f à un sous-champ localement

fermé de F' reste une g-équivalence. Des applications successives du lemme 3.4, impliquent alors que l'on puisse trouver des suites décroissantes de fermés réduits

$$F_{r+1} = \emptyset \subset F_r \subset \dots F_1 \subset F_0 = F$$
$$F'_{r+1} = \emptyset \subset F'_r \subset \dots F'_1 \subset F'_0 = F',$$

avec $F_i = (F'_i \times^h_{F'} F)_{red}$, et tel que les morphismes induits

$$F_i - F_{i-1} \longrightarrow F'_i - F'_{i-1}$$

soient des isomorphismes pour tout i. On a alors

$$[F] = \Sigma_i [F_i - F_{i-1}] = \Sigma_i [F'_i - F'_{i-1}] = [F']$$

dans $K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$. □

3.2 Nombre de points rationels

Avant de passer aux cas des champs spéciaux et à notre théorème principal, signalons le fait suivant qui montre que le groupe de Grothendieck $K'(\mathcal{CH}^{tf}(k))$ est non trivial et qu'il mesure bien la *taille* des champs d'Artin. Pour cela nous allons montrer qu'il factorise l'invariant *nombre de points rationels* sur un corps fini.

Proposition 3.5 *Supposons que $k = \mathbb{F}_q$ soit un corps fini.*

1. *Pour tout champ d'Artin fortement de présentation finie $F \in \mathcal{CH}^{tf}(k)$, l'ensemble $\pi_0(F(k))$ est fini. De plus, pour tout entier $i > 0$ et tout $x \in \pi_0(F(k))$, le groupe $\pi_i(F(k), x)$ est fini.*

2. *L'application*
$$\mu : \mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{tf}(k)] \longrightarrow \mathbb{Q}$$
définie par
$$\mu([F]) := \Sigma_{x \in \pi_0(F(k))} \prod_{i>0} |\pi_i(F(k), x)|^{(-1)^i},$$
(pour $F \in \mathcal{CH}^{tf}(k)$ et où $|A|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini A) se factorise en un morphisme d'anneaux
$$\mu : K(\mathcal{CH}^{tf}(k)) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Preuve: (1) Il suffit de montrer que pour tout champ d'Artin fortement de présentation finie F l'ensemble $\pi_0(F(k))$ est fini. En effet, pour un point $x \in F(k)$, on a
$$\pi_i(F(k), x) \simeq \pi_0(\Omega^{(i)}_x F(k)),$$

où $\Omega_x^{(i)}F$ est le i-ème champ de lacets au point x. Comme $\Omega_x^{(i)}F$ est encore un champ d'Artin fortement de présentation finie le résultat pour π_0 implique celui pour les π_i.

Soit donc $F \in \mathcal{CH}^{tf}(k)$ et montrons que $\pi_0(F(k))$ est fini. En appliquant la proposition 2.4 on voit que l'on se ramène au cas où F est une gerbe. Soit $F \longrightarrow M(F) =: M$ la projection de F sur son espace de modules. On dispose d'un morphisme induit

$$F(k) \longrightarrow M(k),$$

et donc pour tout point $x \in M(k)$ d'un suite exacte en homotopie

$$\pi_0(F_0(k)) \longrightarrow \pi_0(F(k)) \longrightarrow M(k),$$

où F_0 est la fibre homotopique de $F \longrightarrow M$ en x. Comme $M(k)$ est fini, ceci montre que $\pi_0(F(k))$ est fini si $\pi_0(F_0(k))$ l'est pour tout choix de $x \in M(k)$. On se ramène ainsi au cas où $M = Spec\, k$, ou encore où $M(F) = *$. On peut aussi clairement supposer que $F(k)$ est non vide, et on choisit donc $x \in F(k)$.

En appliquant le corollaire 2.9 on voit alors que les faisceaux $\pi_i(F, x)$ sont représentables par des espaces algébriques de type fini sur k. Ceci a pour conséquence que le champ 1-tronqué $\tau_{\leq 1}F$, qui est de la forme $K(\pi_1(F, x), 1)$, est un champ d'Artin. Notons H le schéma en groupes $\pi_1(F, x)$, et H_0 sa composante neutre et réduite. Par le théorème de Lang, on sait que l'ensemble simplicial $K(H_0, 1)(k)$ est connexe, et donc que le morphisme

$$\pi_0(K(H, 1)(k)) \longrightarrow \pi_0(K(H/H_0, 1)(k))$$

est injectif. De plus, comme le schéma en groupes $H/H_0 =: K$ est fini, on peut trouver un plongement $K \hookrightarrow Gl_n$. On a alors

$$K(K, 1) \simeq [X/Gl_n]$$

où $X = Gl_n/K$. Ainsi, le morphisme $X \longrightarrow K(K, 1)$ est un Gl_n-torseur, et donc le morphisme

$$X(k) \longrightarrow \pi_0(K(K, 1)(k))$$

est surjectif. En particulier le membre de droite est fini, et on conclut que l'ensemble $\pi_0(\tau_{\leq 1}F(k))$ est lui-même fini.

Pour conclure il nous reste a montrer que le morphisme naturel

$$F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F$$

induit une injection

$$\pi_0(F(k)) \hookrightarrow \pi_0(\tau_{\leq 1}F(k)).$$

Pour cela il suffit de montrer que pour tout $x \in \pi_0(F(k))$, l'ensemble simplicial $F_{>1}(k)$, fibre homotopique du morphisme précédent en l'image y de x, est connexe. Soit donc $F_{>1}$ le champ défini par

$$F_{>1} := F \times^h_{\tau_{\leq 1}F} *,$$

fibre en y du morphisme $F \longrightarrow \tau_{eq1}F$. Le point x définit un morphisme $z : * \longrightarrow F_{>1}$.

Lemme 3.6 *Soit F un n-champ d'Artin fortement de présentation finie muni d'un point global $x \in \pi_0(F(k))$. On suppose que $M(F) \simeq *$ ainsi que $\pi_1(F,x) \simeq 0$. Alors l'ensemble simplicial $F(k)$ est connexe.*

Preuve du lemme: Remarquons que le corollaire 2.8 implique que F est un gerbe totale. En particulier tous les tronqués $\tau_{\leq m}F$ sont des champs d'Artin fortement de présentation finie.

Montrons cette proposition pour les n-champs avec $n > 1$ fixé (pour $n < 2$ il n'y a rien à démontrer). On raisonne alors par récurrence sur l'entier n. Commençons par le cas $n = 2$. Par hypothèse le champ F est de la forme $K(H,2)$, pour H un schéma en groupes abéliens de type fini. On a alors

$$\pi_0(F(k),x) \simeq H^2_{fppf}(Spec\, k, H) = 0$$

car k est de dimension cohomologique 1 (voir [De-Ga] ou encore [To3, Cor. 3.2 (4)]).

Supposons maintenant que $n > 2$, et aussi que le lemme soit démontré pour tous les m-champs F avec $m < n$. On considère la troncation

$$F \longrightarrow \tau_{\leq n-1}F,$$

et sa fibre homotopique au point x.

$$F_n \longrightarrow F.$$

Par hypothèse, on a $F_n \simeq K(H,n)$ pour un certain schéma en groupes abéliens H de type fini, et donc comme ci-dessus

$$\pi_0(F_n(k),x) \simeq H^n_{fppf}(Spec\, k, H) = 0.$$

De plus, par induction on a aussi $\pi_0(\tau_{\leq n-1}F(k)) = *$. La suite longue d'homotopie associée à la fibration

$$F_n(k) \longrightarrow F(k) \longrightarrow \tau_{\leq n-1}F(k),$$

et l'hypothèse de récurrence montrent alors que $F(k)$ est connexe. □

Le lemme permet de conclure que le morphisme

$$\pi_0(F(k)) \hookrightarrow \pi_0(\tau_{\leq 1}F(k))$$

est injectif, et donc que $\pi_0(F(k))$ est fini par ce que l'on avait vu. Ceci termine le point (1) de la proposition.

(2) Il faut vérifier que μ est compatible aux trois relations définissant $K(\mathcal{CH}^{tf})$. La première est évidente. Soit $F \longrightarrow F'$ est un g-équivalence. Elle induit une équivalence

$$F(\overline{k}) \longrightarrow F'(\overline{k})$$

qui est de plus $Gal(\overline{k}/k)$-équivariante (au sens profini). En passant au points fixes homotopiques (au sens profini) on trouve donc que le morphisme induit

$$F(k) \simeq F(\overline{k})^{hGal(\overline{k}/k)} \longrightarrow F'(k) \simeq F'(\overline{k})^{hGal(\overline{k}/k)}$$

est un équivalence. Ceci implique clairement que $\mu([F]) = \mu([F'])$, et donc que la seconde relation est vérifiée.

Il nous reste à montrer que μ est compatible avec la troisième relation. Soit $F \longrightarrow F'$ une F_0-fibration Zariski localement triviale. Il nous faut montrer que $\mu([F]) = \mu([F']).\mu([F_0])$. Le morphisme

$$\pi_0(F(k)) \longrightarrow \pi_0(F'(k))$$

est clairement surjectif (à cause de la Zariski locale trivialité), et ses fibres homotopiques sont toutes équivalentes à $F_0(k)$. La suite longue en homotopie associée au morphisme $F(k) \longrightarrow F'(k)$ implique alors facilement que l'on a

$$\mu([F]) = \mu([F']).\mu([F_0])$$

(voir [To2] pour plus de détails). □

3.3 Anneau de Grothendieck des champs d'Artin spéciaux

Rappelons d'après le corollaire 2.9 que pour tout champ d'Artin fortement de présentation finie F, tout corps K, tout morphisme $x : Spec\, K \longrightarrow F$, le faisceau $\pi_i(F, x)$ est représentable par un schéma en groupes de type fini sur K.

Définition 3.7 *Un champ d'Artin F est* spécial *s'il est fortement de présentation finie et s'il satisfait aux deux conditions suivantes.*

1. *Pour tout corps K, tout point $x \in F(K)$, et tout $i > 0$ le schéma en groupes $\pi_i(F, x)$ est affine.*
2. *Pour tout corps K, tout point $x \in F(K)$, et tout $i > 1$ le schéma en groupes $\pi_i(F, x)$ est unipotent.*

La sous-catégorie pleine de $\mathcal{CH}^{tf}(k)$ formée des champs d'Artin spéciaux sera notée $\mathcal{CH}^{sp}(k)$.

On note $\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{sp}(k)]$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes de $\mathcal{CH}^{sp}(k)$. On définit alors le groupe de Grothendieck des champs d'Artin spéciaux de manière analogue à celle de la définition 3.2.

Définition 3.8 *Le* groupe de Grothendieck des champs d'Artin spéciaux *est le quotient de $\mathbb{Z}[\mathcal{CH}^{sp}(k)]$ par les trois relations suivantes.*

1. *Pour F et F' dans $\mathcal{CH}^{sp}(k)$ on a*

$$[F \coprod F'] = [F] + [F'].$$

2. *Pour toute g-équivalence* $F \longrightarrow F'$ *dans* $\mathcal{CH}^{sp}(k)$*, on a*

$$[F] = [F'].$$

3. *Soit* F_0 *un champ qui est soit un schéma affine, soit un champ de la forme* $K(\mathbb{G}_a, n)$ *pour un entier* $n > 0$*. Si* $F \longrightarrow F'$ *dans* $\mathcal{CH}^{sp}(k)$ *est une* F_0*-fibration Zariski localement triviale, alors on a*

$$[F] = [F' \times F_0].$$

Ce groupe sera noté $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$*.*

Comme pour le cas des champs d'Artin fortement de présentation finie, le produit direct fait de $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$ un anneau commutatif.

Bien entendu on dispose d'un morphisme naturel

$$K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{tf}(k)).$$

De même, soit $\mathcal{V}(k)$ la catégorie des variétés sur k (i.e. des schémas de type fini sur k), et $\mathbb{Z}[\mathcal{V}(k)]$ le groupe abélien libre engendré par ses classes d'isomorphismes. On définit alors le groupe de Grothendieck des variétés de la façon suivante.

Définition 3.9 *Le* groupe de Grothendieck des variétés *est le quotient de* $\mathbb{Z}[\mathcal{V}(k)]$ *par les deux relations suivantes.*

1. *Pour* X *et* Y *dans* $\mathcal{V}(k)$ *on a*

$$[X \coprod Y] = [X] + [Y].$$

2. *Pour toute g-équivalence* $X \longrightarrow Y$ *dans* $\mathcal{V}(k)$*, on a*

$$[X] = [Y].$$

Ce groupe sera noté $K(\mathcal{V}(k))$*.*

Le produit direct fait de $K(\mathcal{V}(k))$ un anneau commutatif.

Le lecteur vérifiera à l'aide du lemme 3.4 que lorsque k est de caractéristique nulle $K(\mathcal{V}(k))$ est isomorphe au groupe de Grothendieck des variétés que l'on rencontre habituellement dans la littérature, défini par l'unique relation

$$[X] = [X - Y] + [Y]$$

pour tout sous-schéma fermé $Y \subset X$ (voir [D-L]). Ceci dit, en caractéristique positive cette unique relation n'est pas suffisante pour retrouver le groupe $K(\mathcal{V}(k))$ définit ci-dessus.

Noter aussi que l'analogue de la relation (3) des définitions 3.2 et 3.8 n'apparait pas dans la définition de $K(\mathcal{V}(k))$. Ceci s'explique par le fait que dans $K(\mathcal{V}(k))$, si $X \longrightarrow Y$ est une fibration Zariski triviale de fibre Z alors on a toujours $[X] = [Y].[Z]$. En effet, par stratification il suffit de montrer cela génériquement sur Y, mais dans ce cas on peut supposer que la fibration est triviale et c'est alors immédiat.

L'inclusion des variétés dans les champs d'Artin spéciaux induit un morphisme d'anneaux bien défini

$$j : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k)).$$

Nous noterons $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1]$, comme élément de $K(\mathcal{V}(k))$ ou encore de $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$ (noter que $j(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$). De même, nous noterons $\mathbf{1} := [Spec\, k]$, comme élément de $K(\mathcal{V}(k))$ ou encore de $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$. On remarque que le morphisme

$$Spec\, k \longrightarrow K(Gl_n, 1)$$

est une Gl_n-fibration Zariksi localement triviale, et donc dans $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$ on a l'égalité

$$[K(Gl_n, 1)].[Gl_n] = [Spec\, k] = 1.$$

Ceci montre que $[Gl_n]$ est inversible dans $K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$, et donc que toutes les classes $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^i - 1$ le sont aussi (voir le lemme 3.11 ci-dessous). On considère alors l'anneaux localisé en $\mathbb{L}$ et en tous les $\mathbb{L}^i - \mathbf{1}$ pour $i > 0$, et le morphisme induit

$$j : K(\mathcal{V}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k)).$$

Notre théorème principal est le suivant.

Théorème 3.10 *Le morphisme*

$$j : K(\mathcal{V}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k)).$$

est un isomorphisme.

La preuve de ce théorème nous prendra un certain temps et nous y consacrons le paragraphe suivant. Avant de nous y lancer signalons le fait suivant qui nous sera utile par la suite.

Lemme 3.11 *On a dans $K(\mathcal{V}(k))$ l'égalité suivante*

$$[Gl_n] = \mathbb{L}^{\frac{n(n-1)}{2}}. \prod_{0<i<n+1} (\mathbb{L}^i - \mathbf{1}).$$

En conséquence le morphisme naturel

$$K(\mathcal{CH}^{sp}(k))[\{[Gl_n]^{-1}\}_{n>0}] \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}]$$

est un isomorphisme.

Preuve: On démontre l'égalité

$$[Gl_n] = \mathbb{L}^{\frac{n(n-1)}{2}}. \prod_{0<i<n+1} (\mathbb{L}^i - \mathbf{1})$$

par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est évident. Pour $n > 1$, on considère l'action naturelle de Gl_n sur $\mathbb{A}^n - \{0\}$. Cette action est transitive et on dispose donc d'un isomorphisme de schémas sur $Spec\, k$

$$\mathbb{A}^n - \{0\} \simeq Gl_n/H,$$

où H est le stabilisateur de $(1, 0, \ldots, 0)$. Ainsi, le groupe H est le produit semi-direct de Gl_{n-1} par $\mathbb{G}_a^{n-1}$. En particulier, pour tout schéma X le morphisme naturel

$$H^1_{zar}(X, H) \longrightarrow H^1_{fppf}(X, H)$$

est un isomorphisme (Hilbert 90 et le fait que $\mathbb{G}_a^{n-1}$ soit le faisceau en groupes sous-jacent à un faisceau cohérent). Le morphisme $Gl_n \longrightarrow Gl_n/H$ est donc une H-fibration Zariski localement triviale et l'on trouve donc

$$[Gl_n] = [H].[Gl_n/H] = \mathbb{L}^{n-1}.[Gl_{n-1}].(\mathbb{L}^n - \mathbf{1}).$$

On termine alors par récurrence. □

3.4 Preuve du théorème 3.10

La preuve du théorème 3.10 consiste à réduire successivement la catégorie $\mathcal{CH}^{sp}(k)$, sans changer son groupe de Grothendieck, en une chaine qui commence avec $\mathcal{CH}^{sp}(k)$ et qui finit avec $\mathcal{V}(k)$.

Pour commencer, une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ est dite *adaptée* si elle vérifie les conditions suivantes.

1. $\mathcal{V}(k) \subset \mathcal{C}$
2. La sous-catégorie $\mathcal{C}$ est stable par sommes disjointes et produits finis.
3. Si $F \in \mathcal{C}$ alors tout sous-champ ouvert et tout sous-champ fermé de F est dans $\mathcal{C}$.
4. Soit F_0 un champ qui est soit un schéma affine, soit un champ de la forme $K(\mathbb{G}_a, n)$ pour un entier $n > 0$. Si $F \longrightarrow F'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ qui est une F_0-fibration localement Zariski triviale, alors $F_0 \in \mathcal{C}$.

Pour une sous-catégorie pleine $\mathcal{C} \subset \mathcal{CH}^{sp}(k)$ adaptée, nous noterons $K(\mathcal{C})$ le groupe quotient de $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ (le groupe abélien libre sur les classes d'isomorphismes de $\mathcal{C}$) par les trois relations suivantes.

1. Pour F et F' dans $\mathcal{C}$ on a
$$[F \coprod F'] = [F] + [F'].$$

2. Pour toute g-équivalence dans $\mathcal{C}$ $F \longrightarrow F'$, on a
$$[F] = [F'].$$

3. Soit F_0 un champ qui est soit un schéma affine, soit un champ de la forme $K(\mathbb{G}_a, n)$ pour un entier $n > 0$. Si $F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{C}$ est une F_0-fibration Zariski localement triviale, alors on a
$$[F] = [F' \times F_0].$$

Noter que les relations (1) et (3) ont un sens car $\mathcal{C}$ est adaptée. De plus, l'inclusion naturelle $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{CH}^{sp}(k)$ induit un morphisme d'anneaux
$$K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k)).$$
Plus généralement, pour deux sous-catégories adaptées $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, le foncteur d'inclusion induit un morphisme d'anneaux
$$K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}').$$

Un lemme clé que nous utiliserons tout au long de la preuve est le suivant.

Lemme 3.12 *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ deux sous-catégories pleines et adapatées de $\mathcal{CH}^{sp}(k)$. On suppose que pour tout schéma affine X, et toute X-fibration Zariski localement triviale $f : F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{C}'$, il existe un sous-champ fermé $F'_0 \subsetneq F'$ avec*
$$F' - F'_0 \in \mathcal{C} \qquad F \times^h_{F'} (F' - F'_0) \in \mathcal{C}.$$
Alors le morphisme d'inclusion
$$K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}')$$
est un isomorphisme.

Preuve: On définit un inverse
$$\phi : K(\mathcal{C}') \longrightarrow K(\mathcal{C})$$
de la façon suivante. Pour $F \in \mathcal{C}'$, on peut trouver une suite décroissante de sous-champs fermés
$$\emptyset = F_{r+1} \subset F_r \subset \cdots \subset F_1 \subset F_0 = F$$
tel que chaque champ $F_i - F_{i+1}$ soit dans $\mathcal{C}$ (on applique l'hypothèse à $X = Spec\, k$). On pose
$$\phi([F]) := \Sigma_i [F_i - F_{i+1}].$$

Il faut montrer que ceci est bien défini, c'est à dire compatible avec les relations qui définissent $K(\mathcal{C}')$ et $K(\mathcal{C}')$. Pour les deux premières relations ceci est immédiat. La troisième relation est compatible grace à l'hypothèse (on remarquera que pour une $K(\mathbb{G}_a, n)$-fibration Zariski localement triviale $F \longrightarrow F'$ avec $n > 0$, les sous-champs ouverts de F' sont en correspondance avec ceux de F). Enfin, on vérifie facilement que ϕ est l'inverse cherché. □

Soit $\mathcal{C}_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{CH}^{sp}(k)$ formée des champs de F tel qu'il existe un espace algébrique X, un entier $r \geq 0$ et un Gl_r-torseur $X \longrightarrow \tau_{\leq 1}F$ (on posera $Gl_0 := Spec\, k$). C'est une sous-catégorie adaptée. Notons que si $F \in \mathcal{C}_1$ alors le 1-champ $\tau_{\leq 1}F$ est équivalent au champ quotient $[X/Gl_r]$, et donc est un 1-champ d'Artin. Noter aussi que d'après le théorème de Hilbert 90, tout Gl_r-torseur entre champs est une Gl_r-fibration Zariski localement triviale.

Lemme 3.13 *Le morphisme*

$$K(\mathcal{C}_1) \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$$

est un isomorphisme.

Preuve: Pour pouvoir appliquer le lemme 3.12 il nous suffit de montrer que pour $F \in \mathcal{C}_1$, il existe un sous-champ fermé F_0 de F tel que $F - F_0 \in \mathcal{C}_1$. En effet, supposons que ceci soit le cas. Alors, si $f : F \longrightarrow F'$ est une X-fibration localement Zariski triviale avec X un schéma affine, on vérifie facilement que le morphisme induit $\tau_{\leq 1}F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F'$ est encore une X-fibration localement Zariski triviale. De ceci on déduit que F est dans $\mathcal{C}_1$ si F' l'est, et donc que les conditions du lemme 3.12 sont vérifiées.

Montrons donc que pour $F \in \mathcal{C}_1$, il existe un sous-champ fermé F_0 de F tel que $F - F_0 \in \mathcal{C}_1$. En remplaçant F par son sous-champ réduit on voit que l'on peut supposer que F est réduit. Il s'agit alors de trouver un ouvert non-vide U de F tel que $U \in \mathcal{C}_1$. Par le corollaire 2.8 on voit aussi que l'on peut supposer que F est une gerbe totale, et en particulier que $\tau_{\leq 1}F$ est un 1-champ d'Artin. Comme ce que l'on cherche à montrer ne concerne que le tronqué $\tau_{\leq 1}F$ on peut tout simplement supposer que $F = \tau_{\leq 1}F$ (i.e. que F est 1-tronqué).

On considère la projection

$$F \longrightarrow M(F) = M.$$

On restreint ce morphisme à un point générique $Spec\, K$ de M, et on trouve une gerbe F_0 au-dessus de $Spec\, K$. Il existe une extension finie K' de K, tel que le champ $F_0 \times^h_{Spec\, K} Spec\, K'$ soit de le forme $K(G', 1)$, où G' est un schéma en groupes affine et de type fini sur K'. On choisit alors une immersion fermée de schémas en groupes sur K'

$$i : G' \hookrightarrow Gl_{r'}.$$

Le morphisme i définit un fibré vectoriel E de rang r' sur $K(G', 1)$. Le morphisme

$$p : K(G', 1) \longrightarrow F_0$$

étant fini et plat, $f_*(E)$ est un fibré vectoriel sur F_0, de rang disons r. Le Gl_r-torseur associé défini un morphisme de champs $X_0 \longrightarrow F_0$. Par construction on peut voir que X_0 est 0-tronqué (car i est un monomorphisme), et donc que c'est un espace algébrique.

Maintenant, comme $K(Gl_r, 1)$ est un champ localement de présentation finie, le Gl_r-torseur $X \longrightarrow F_0$ s'étend en un Gl_r-torseur $X \longrightarrow F \times^h_M U$, pour un ouvert non-vide U de M. En choisissant U assez petit on peut aussi faire en sorte que X soit un espace algébrique. □

Notons $\mathcal{C}_2$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_1$ formée des champs F tels que pour tout schéma affine X et tout point $x \in F(K)$, les faisceaux $\pi_i(F, x)$ sur X soient représentables par des schémas en groupes plats sur X. C'est une sous-catégorie adaptée.

Lemme 3.14 *Le morphisme*

$$K(\mathcal{C}_2) \longrightarrow K(\mathcal{C}_1)$$

est un isomorphisme.

Preuve: C'est une application du lemme clé 3.12 et du corollaire 2.8. □

Soit $\mathcal{C}_3$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_2$ formée des champs F tels que le morphisme naturel $F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F$ soit un isomorphisme (i.e. formée des 1-champs d'Artin). C'est une sous-catégorie adaptée.

Lemme 3.15 *Le morphisme d'inclusion*

$$K(\mathcal{C}_3) \longrightarrow K(\mathcal{C}_2)$$

est injectif.

Preuve: Nous allons construire une morphisme

$$\phi : K(\mathcal{C}_2) \longrightarrow K(\mathcal{C}_3)$$

et montrer que c'est une retraction.

Soit $F \in \mathcal{C}_2$, et considérons le morphisme naturel $F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F$. Ce morphisme est relativement simplement connexe, et donc on peut définir des faisceaux en groupes abéliens $\pi_i(F)$ sur $\tau_{\leq 1}F$. Ces faisceaux sont tels que pour tout schéma affine X et tout morphisme $x : X \longrightarrow F$, la restriction de $\pi_i(F)$ sur X soit naturellement isomorphe au faisceau $\pi_i(F, x)$. En particulier on voit que les $\pi_i(F)$ sont des schémas en groupes plats et unipotents sur $\tau_{\leq 1}(F)$. Ils possèdent donc une dimension relative localement constante, et on peut donc écrire $\tau_{\leq 1}F$ comme une réunion disjointe de sous-champs ouverts et fermés $\tau_{\leq 1}F_\alpha \subset \tau_{\leq 1}F$ tel que chaque schéma en groupes $\pi_i(F)$ sur $\tau_{\leq 1}F_\alpha$ soit de dimension relative

constante égale à $\beta_i^{F,\alpha}$ (par la suite on verra $\beta_i^{F,\alpha}$ comme la valeur d'une fonction β_i^F localement constante sur $\tau_{\leq 1}F$). On pose alors

$$\phi([F]) := \sum_\alpha [\tau_{\leq 1}F_\alpha].\prod_{i>1}.\mathbb{L}^{(-1)^i.\beta_i^{F,\alpha}} \in K(\mathcal{C}_3).$$

Il est immédiat de vérifier que ϕ ainsi défini est compatible avec la relation (1) de la définition 3.8. Soit $f : F \longrightarrow F'$ une g-équivalence. On voit que pour tout corps algébriquement clos K et tout point $x \in F(K)$, le morphisme induit

$$\pi_i(F,x)(K) \simeq \pi_i(F(K),x) \longrightarrow \pi_i(F',f(x))(K) \simeq \pi_i(F'(K),f(x))$$

est un isomorphisme. Ceci implique clairement que les schémas en groupes $\pi_i(F,x)$ et $\pi_i(F',f(x))$ ont même dimension. On peut ainsi écrire F' comme réunion disjoint $\coprod_\alpha F'_\alpha$, et de même $F \simeq \coprod_\alpha F_\alpha$ avec $F_\alpha \simeq F \times^h_{F'} F'_\alpha$, tel que $\beta_i^{F,\alpha} = \beta_i^{F',\alpha}$ pour tout $i > 1$. Comme de plus le morphisme induit $\tau_{\leq 1}F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F'$ est une g-équivalence, ceci implique clairement que $\phi([F]) = \phi([F'])$. On voit donc que ϕ est aussi compatible avec la relation (2) de la définition 3.8.

Montrons enfin que ϕ est aussi compatible avec la relation (3). Soit F_0 un champ qui est soit $K(\mathbb{G}_a,n)$ pour un $n > 0$, soit un un schéma affine, et soit $f : F \longrightarrow F'$ une F_0-fibration Zariski localement triviale dans $\mathcal{C}_2$. Dans le cas où F_0 est un schéma affine on voit facilement que l'on a une équalité $f^*(\beta_i^{F'}) = \beta_i^F$ pour tout $i > 1$. Comme de plus le morphisme induit $\tau_{\leq 1}F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F'$ est une F_0-fibration Zariski localement triviale ceci implique que $\phi([F]) = \phi([F_0]).\phi([F'])$.

Supposons maintenant que F_0 soit de la forme $K(\mathbb{G}_a,n)$ pour $n > 1$, ce qui implique que $\tau_{\leq 1}F \simeq \tau_{\leq 1}F'$. En utilisant la relation (1) de la définition 3.8 on peut supposer que F et F' sont tous deux connexes. On note alors simplement β_i la valeur de β_i^F et β'_i la valeur de $\beta_i^{F'}$. La suite exacte longue en homotopie montre que pour $i \neq n, n+1$, le morphisme induit $\pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(F')$ est un isomorphisme. Ceci implique que pour $i \neq n, n+1$ on a $\beta_i = \beta'_i$. De plus, on a une suite exacte longue de faisceaux en groupes abéliens sur $\tau_{\leq 1}F \simeq \tau_{\leq 1}F'$

$$0 \longrightarrow \pi_{n+1}(F) \longrightarrow \pi_{n+1}(F') \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{u} \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(F') \longrightarrow 0.$$

Rappelons que la dimension des fibres des $\pi_i(F)$ et des $\pi_i(F')$ est constante. Ainsi, suivant que le morphisme u est nul ou pas, on voit que l'on a deux cas, ou bien

$$\beta'_{n+1} = \beta_{n+1} + 1 \qquad \beta'_n = \beta_n,$$

ou bien

$$\beta'_{n+1} = \beta_{n+1} \qquad \beta_n = \beta'_n + 1.$$

Dans tous les cas ceci implique que l'on a

$$\phi([F]) = \phi([F']).\mathbb{L}^{(-1)^n} = \phi([F' \times K(\mathbb{G}_a,n)]).$$

Il nous reste le cas où $F_0 = K(\mathbb{G}_a, 1)$. On dispose alors d'une suite exacte de faisceaux sur $\tau_{\leq 1}F$

$$0 \longrightarrow \pi_2(F) \longrightarrow f^*(\pi_2(F')) \xrightarrow{\delta} \mathbb{G}_a \times \tau_{\leq 1}F.$$

Ainsi, comme les dimensions relatives de $\pi_2(F)$ et $\pi_2(F')$ sont constantes on voit que ou bien le morphisme δ est surjectif, ou bien l'image de δ est fibres à fibres un sous-groupe de dimension nulle de $\mathbb{G}_a$. Dans le premier cas, on a

$$\beta_2 = \beta'_2 - 1 \qquad \beta_i = \beta'_i \ \forall\, i \neq 2$$

et $\tau_{\leq 1}F \simeq \tau_{\leq 1}F'$. Ceci implique clairement que $\phi([F]) = \phi([F_0]).\phi([F'])$. Dans le second cas on a $\beta_i = \beta'_i$ pour tout $i > 1$, et donc il nous suffit de voir que $[\tau_{\leq 1}F] = [\tau_{\leq 1}F'].\mathbb{L}^{(-1)}$ dans $K(\mathcal{C}_3)[\mathbb{L}^{-1}]$. Pour cela notons que $\tau_{\leq 1}F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F'$ est un morphisme de 1-champs d'Artin tel que pour tout schéma affine X et tout point $x : X \longrightarrow F'$, le champ $F \times^h_{F'} X$ est, localement sur X, équivalent comme champ sur X à un champ de la forme $K(H, 1)$, avec H un schéma en groupes sur X, à fibres unipotentes connexes et de dimension 1. Ceci implique que, tout au moins sur un ouvert non vide de $\tau_{\leq 1}(F')$ (ce qui suffit par un argument de stratification), que le morphisme $\tau_{\leq 1}F \longrightarrow \tau_{\leq 1}F'$ est une $K(\mathbb{G}_a, 1)$-fibration Zariski localement triviale. Ainsi, on a $[\tau_{\leq 1}F] = [\tau_{\leq 1}F'].[K(\mathbb{G}_a, 1)] = [\tau_{\leq 1}F'].\mathbb{L}^{(-1)}$. Ceci termine la démonstration du fait que ϕ soit compatible avec la relation (3) de la définition 3.8, et donc qu'il définisse un morphisme

$$K(\mathcal{C}_2) \longrightarrow K(\mathcal{C}_3).$$

Par construction ϕ est une rétraction du morphisme d'inclusion

$$i : K(\mathcal{C}_3) \longrightarrow K(\mathcal{C}_2).$$

□

Lemme 3.16 *Le morphisme d'inclusion*

$$i : K(\mathcal{C}_3) \longrightarrow K(\mathcal{C}_2)$$

est surjectif.

Preuve: Soit donc $F \in \mathcal{C}_2$ (que l'on peut supposer réduit). Soit $X \longrightarrow \tau_{\leq 1}F$ un Gl_r-torseur avec X un espace algébrique. On pose $F_X := F \times^h_{\tau_{\leq 1}F} X$. Alors, le morphisme $F_X \longrightarrow F$ est un Gl_r-torseur, et donc une Gl_r-fibration Zariski localement triviale. Ainsi on a $[F] = [F_X].[Gl_r]^{-1}$ dans $K(\mathcal{C}_2)$. On voit ainsi que l'on peut remplacer F par F_X, où encore ce qui revient au même supposer que F est une gerbe totale avec $\tau_{\leq 1}F \simeq M(F) =: M$.

On suppose maintenant que F est un n-champ d'Artin, et on montre par récurrence sur n que $[F]$ est dans l'image du morphisme i. Pour $n = 0, 1$ c'est

évident car $F \in \mathcal{C}_3$. Supposons donc $n > 1$, et que pour tout $(n-1)$-champ $F \in \mathcal{C}_2$, $[F]$ soit dans l'image de i. On considère le morphisme naturel

$$p : F \longrightarrow \tau_{\leq n-1} F.$$

C'est un fibration localement triviale pour la topologie fppf de fibre équivalente à $K(H, n)$, où $H = \pi_n(F)$ est un schéma en groupes abéliens plats et unipotent sur $M(F) = M$. Sur un ouvert Zariski U non vide de M, il existe une suite exacte courte de schémas en groupes sur M

$$0 \longrightarrow H_{red} \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

où H_{red} est réduit, et $K := H/H_{red}$ est plat et de dimension relative nulle sur M. En stratifiant F si nécessaire on supposera donc qu'une telle suite exacte existe sur M. On pourra aussi, et c'est ce que nous ferons, supposer que le groupe H_{red} possède une fitration

$$H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_r = H_{red},$$

par des sous-groupes plats sur M et telle que chaque quotient H_i/H_{i-1} soit isomorphe, comme schéma en groupes sur M, à $\mathbb{G}_a \times M$.

Maintenant, la fibration p est classifiée par une classe dans $H^{n+1}_{fppf}(\tau_{\leq n-1}F, H)$, et entre donc dans un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & K(H, n+1). \end{array}$$

En composant avec le morphisme naturel $H \longrightarrow K$, on trouve un autre diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} F' & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & K(K, n+1). \end{array}$$

Il existe de plus un morphisme naturel $F \longrightarrow F'$, qui est une fibration en $K(H_{red}, n)$, et il existe donc un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & K(H_{red}, n+1). \end{array}$$

En composant avec les quotients successifs $H \longrightarrow H/H_i$, on définit des champs F_i par des diagrammes homotopiquement cartésiens

$$\begin{array}{ccc} F_i & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & K(H/H_i, n+1). \end{array}$$

De plus, il existe des morphismes naturels $F_{i-1} \longrightarrow F_i$ qui sont des fibrations localement triviales en $K(\mathbb{G}_a, n)$. Ainsi, en utilisant la relation (3) de la définition 3.8 on trouve dans $K(\mathcal{C}_2)$

$$[F_{i-1}] = [F_i].[K(\mathbb{G}_a, n)] = [F_i].\mathbb{L}^{(-1)^n}.$$

Par récurrence sur i ceci donne

$$[F] = [F'].\mathbb{L}^{(-1)^n.d},$$

où d est la dimension relative de H sur M. Ainsi, on peut supposer que $F = F'$, et donc que H est un groupe fini unipotent et plat sur M.

Mais pour tout corps K algébriquement clos on a pour tout $i > 0$

$$\pi_i(K(H,n)(K)) \simeq H^{n-i}_{fppf}(Spec\, K, H) \simeq 0.$$

Ainsi, l'ensemble simplicial $K(H,n)(K)$ est contractile, et donc le morphisme $F \longrightarrow \tau_{\leq n-1}F$ est une g-équivalence. On a donc $[F] = [\tau_{\leq n-1}F]$ dans $K(\mathcal{C}_2)$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Soit $\mathcal{C}_4$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_3$ formée des espaces algébriques

Lemme 3.17 *Le morphisme d'inclusion*

$$K(\mathcal{C}_4)[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow K(\mathcal{C}_3)$$

est un isomorphisme.

Preuve: Rappelons que $\mathcal{C}_3$, qui par définition est une sous-catégorie de $\mathcal{C}_1$, est la catégorie des 1-champs d'Artin F tel qu'il existe une espace algébrique X et un Gl_r-torseur $X \longrightarrow F$, ou de manière équivalente tel que F soit équivalent à un champ quotient $[X/Gl_r]$ pour un certain espace algébrique X et une certaine action de Gl_r sur X. On construit alors un morphisme

$$\phi : K(\mathcal{C}_3) \longrightarrow K(\mathcal{C}_4)[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}]$$

en posant $\phi([F]) = [X].[Gl_r]^{-1}$ (cette formule a un sens grace au lemme 3.11). On remarque facilement que cette définition est indépendant du choix du Gl_r-torseur $X \longrightarrow F$ (à l'aide de la relation (3) de la définition 3.8).

Il nous faut montrer que ϕ ainsi défini est compatible aux trois relations de la définition 3.8. La première est évidente. Soit $f : F \longrightarrow F'$ une g-équivalence

dans $\mathcal{C}_3$. On choisit un Gl_r-torseur $X' \longrightarrow F'$ avec X' un espace algébrique, et on considère le carré homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F' \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Le morphisme $Y \longrightarrow F$ est toujours un Gl_r-torseur, mais Y n'est peut-être pas un espace algébrique. On choisit donc un Gl_s-torseur $X \longrightarrow F$ avec X un espace algébrique, et on considère $Z := X \times^h_F Y$. Le morphisme naturel $Z \longrightarrow X$ est un Gl_r-torseur, et donc Z est un espace algébrique. De plus le morphisme $Z \longrightarrow Y$ est un Gl_s-torseur. Enfin, comme le morphisme $Y \longrightarrow X'$ est une g-équivalence, on trouve dans $K(\mathcal{C}_4)[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}]$ l'égalité suivante

$$[X'].[Gl_r]^{-1} = [Y].[Gl_r]^{-1} = [Z].[Gl_s]^{-1}.[Gl_r]^{-1} = [X].[Gl_s]^{-1}.$$

Ceci implique bien que $\phi([F]) = \phi([F'])$. Il nous reste donc à vérifier que ϕ est compatible avec la relation (3) de la définition 3.8. Pour cela, soit $F \longrightarrow F'$ une F_0-fibration Zariski localement triviale, avec F_0 qui est soit un schéma affine X soit $K(\mathbb{G}_a, 1)$ (noter que comme F et F' sont des 1-champs on ne peut pas avoir une fibration en $K(\mathbb{G}_a, n)$ pour $n > 1$). Commençons par le cas où F_0 est un schéma affine Z. Soit $X' \longrightarrow F'$ un Gl_r-torseur avec X' un espace algébrique, et $X := X' \times^h_{F'} F \longrightarrow F$ le Gl_r-torseur induit. Comme le morphisme $X \longrightarrow X'$ est une Z-fibration Zariski localement triviale on voit que X est un espace algébrique. Ainsi, on trouve

$$[X].[Gl_r]^{-1} = [Z].[X'].[Gl_r]^{-1},$$

ce qui montre que $\phi([F]) = \phi([F']).\phi([Z]))$. Passons au cas où F_0 est $K(\mathbb{G}_a, 1)$. Notons encore $X' \longrightarrow F'$ un Gl_r-torseur avec X' un espace algébrique et $Y := X' \times^h_{F'} F$. Le morphisme $Y \longrightarrow F$ est un Gl_r-torseur, et $Y \longrightarrow X'$ est une $K(\mathbb{G}_a, 1)$-fibration Zariski localement triviale. Soit $X \longrightarrow F$ un Gl_s-torseur, et $Z := X \times^h_F Y$. Alors, comme précédemment on voit que Z est un espace algébrique et que $Z \longrightarrow Y$ est un Gl_s-torseur. Soit $X'_i \subset X'$ une suite décroissante de sous-espaces algébrique fermés de X' tel que pour $V_i = X'_i - X'_{i-1}$ le champ $Y_i := Y \times^h_{X'} V_i$ soit équivalent au-dessus de V_i à la projection $V_i \times K(\mathbb{G}_a, 1)$. Posons alors $Z_i := Z \times^h_Y Y_i$ et $W_i := Z \times^h_Y V_i$. Alors les morphismes $W_i \longrightarrow V_i$ sont des Gl_s-torseurs entre espaces algébriques. D'autre part les morphismes $W_i \longrightarrow Z_i$ sont des $\mathbb{G}_a$-torseurs entre espaces algébrique. Ainsi, on trouve les égalités suivantes dans $K(\mathcal{C}_4)[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}]$

$$[X].[Gl_s]^{-1} = [Z].[Gl_r]^{-1}.[Gl_s]^{-1} = \Sigma_i[Z_i].[Gl_r]^{-1}.[Gl_s]^{-1} = \Sigma_i[W_i].\mathbb{L}^{-1}.[Gl_r]^{-1}.[Gl_s]^{-1}$$
$$= \Sigma_i[V_i].\mathbb{L}^{-1}.[Gl_r]^{-1} = [X'].[Gl_r]^{-1}.\mathbb{L}^{-1}.$$

En d'autres termes on trouve

$$\phi([F]) = \phi([F']).\mathbb{L}^{-1}.$$

Ceci est presque ce que l'on cherche à démontrer, pour finir il nous reste encore à remarquer que $\phi([K(\mathbb{G}_a,1)]) = \mathbb{L}^{-1}$. Pour cela, soit $\mathbb{G}_a \subset Gl_2$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Si l'on pose $X = Gl_2/\mathbb{G}_a$, le morphisme naturel $X \longrightarrow K(\mathbb{G}_a,1)$ est un Gl_2-torseur. On trouve donc $\phi([K(\mathbb{G}_a,1)]) = [X].[Gl_2]^{-1}$. Cependant, le morphisme $Gl_2 \longrightarrow X$ est un $\mathbb{G}_a$-torseur, et donc une $\mathbb{G}_a$-fibration Zariski localement triviale. On a donc bien $\phi([K(\mathbb{G}_a,1)]) = [X].[Gl_2]^{-1} = [\mathbb{G}_a]^{-1}.[Gl_2].[Gl_2]^{-1} = \mathbb{L}^{-1}$.

Nous en avons fini avec le fait que ϕ soit compatible aux relations (1), (2) et (3) de la définition 3.8, et donc avec le fait que ϕ soit bien défini. De plus, il est clair que le morphisme ϕ est une rétraction du morphisme d'inclusion

$$K(\mathcal{C}_4)[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow K(\mathcal{C}_3).$$

Enfin, pour tout $F \in \mathcal{C}_3$, soit X un espace algébrique et $X \longrightarrow F$ un Gl_r-torseur. Alors, on a dans $K(\mathcal{C}_3)[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}]$ l'égalité $[F] = [X].[Gl_r]^{-1}$. Ceci montre que le morphisme d'inclusion est surjectif et donc que c'est un isomorphisme. □

Notons enfin $\mathcal{C}_5 = \mathcal{V}(k)$ la sous-catégorie pleine formée des schémas de type fini sur k. Le lemme 3.12 implique que le morphisme d'inclusion

$$K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow K(\mathcal{C}_4)$$

est un isomorphisme. Ainsi, les lemmes 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17 mis bout à bout montrent que le morphisme d'inclusion

$$K(\mathcal{V}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow K(\mathcal{CH}^{sp}(k))$$

est un isomorphisme. Ceci achève la preuve du théorème 3.10.

3.5 Invariants numériques des champs d'Artin spéciaux

Une autre façon d'énoncer le théorème 3.10 est la suivante.

Corollaire 3.18 *Soit A un anneau commutatif et*

$$\chi : Iso(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow A$$

une application des classes d'isomorphismes de variétés sur k vers A qui vérfie les conditions suivantes.

1. $$\chi(X \coprod Y) = \chi(X) + \chi(Y)$$
2. $$\chi(Spec\, k) = 1$$
3. $$\chi(X \times Y) = \chi(X).\chi(Y)$$

4. *Pour toute g-équivalence $g : X \longrightarrow Y$ on a $\chi(X) = \chi(Y)$.*

5. *Les éléments $\chi(\mathbb{A}^1)$ et $\chi(\mathbb{A}^i - \{0\})$ pour $i > 0$ sont inversibles dans A.*

Alors, il existe une extension de χ en une application

$$\chi : Iso(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow A.$$

Cette extension est de plus unique si elle satisfait les conditions suivantes.

1.
$$\chi(F \coprod F') = \chi(F) + \chi(F')$$

2.
$$\chi(F \times F') = \chi(F).\chi(F')$$

3. *Pour toute g-équivalence $g : F \longrightarrow F'$ on a $\chi(F) = \chi(F')$.*

4. *Pour tout F_0 qui est soit un schéma affine, soit de la forme $K(\mathbb{G}_a, n)$ avec $n > 1$, et toute F_0-fibration Zariski localement triviale, on a*
$$\chi(F) = \chi(F_0).\chi(F').$$

Le corollaire précédent permet de construire de très exemples de morphismes d'anneaux $\chi : K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow A$, et donc de très nombreux invariants de champs spéciaux. En effet, on connait beaucoup d'exemples de morphismes d'anneaux

$$\chi : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow A$$

qui rendent $\mathbb{L}$ et les $\mathbb{L}^i - \mathbf{1}$ inversibles. Citons les exemples suivants.

Séries et nombres de Hodge: Supposons que $k = \mathbb{C}$. Alors il existe un morphisme d'anneaux

$$P_H : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow \mathbb{Z}[u, v],$$

déterminé par la propriété que pour X une variéte lisse et projective sur k on ait

$$P_H(X)(u, v) = \Sigma_{p,q}(-1)^{p+q} Dim H^p(X, \Omega^q_X) u^p v^q$$

(voir [D-L]). Noter que l'on a

$$P_H(\mathbb{A}^1) = P_H(\mathbb{P}^1) - P_H(Spec\, k) = 1 + uv - 1 = uv.$$

De même, on a pour $i > 0$

$$P_H(\mathbb{L}^i - \mathbf{1}) = (uv)^i - 1.$$

Ainsi, le théorème 3.10 nous dit que le morphisme

$$P_H : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow \mathbb{Z}[[u, v]][u^{-1}, v^{-1}]$$

qui se factorise en un morphisme

$$P_H : K(\mathcal{V}(k))[\mathbb{L}^{-1}, \{(\mathbb{L}^i - \mathbf{1})^{-1}\}_{i>0}] \longrightarrow \mathbb{Z}[[u,v]][u^{-1}, v^{-1}]$$

s'étend de façon unique en un morphisme d'anneaux

$$P_H : K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow \mathbb{Z}[[u,v]][u^{-1}, v^{-1}].$$

Définition 3.19 *Pour un champ d'Artin spécial F,* la série de Hodge de F *est la série de Laurent en deux variables*

$$P_H([F])(u,v) = \Sigma_{p,q} h^{p,q}(F) u^p v^q \in \mathbb{Z}[[u,v]][u^{-1}, v^{-1}].$$

Les nombres entiers $h^{p,q}(F)$ sont appelés les nombres de Hodge de F.

Caractéristique d'Euler motivique: Supposons maintenant que k soit de caractéristique nulle. Notons $CMot(k)$ la catégorie des motifs de Chow sur k. En utilisant la résolution des singularités on peut consrtuire un morphisme d'anneaux

$$\chi_{mot} : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow K(CMot(k)),$$

où $K(CMot(k))$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie additive $CMot(k)$ (voir [G-S]). Notons que $\chi_{mot}(\mathbb{L}) = [L]$, avec $L = h^2(\mathbb{P}^1)$ le motif de Lefschetz, et est donc un objet inversible de la catégorie des $CMot(k)$. Ainsi, le théorème 3.10 nous dit que le morphisme

$$\chi_{mot} : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow K(CMot(k))[\{(L^i - 1)^1\}_{i>0}],$$

se factorise en un morphisme d'anneaux

$$\chi_{mot} : K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow K(CMot(k))[\{(L^i - 1)^1\}_{i>0}].$$

Définition 3.20 *Pour un champ d'Artin spécial F,* la caractéristique d'Euler motivique F *est* $\chi_{mot}([F]) \in K(CMot(k))[\{(L^i - 1)^1\}_{i>0}]$. *Elle sera notée* $\chi_{mot}(F)$.

En appliquant plusieurs foncteurs de réalisations on trouve ainsi de nombreux invariants pour les champs d'Artin spéciaux. Par exemple, les nombres de Hodge de la définition 3.8 peuvent être extraits de la réalisation de $\chi_{mot}(F)$ dans le groupe de Grothendieck des structures de Hodge pures.

Caractéristique d'Euler l-adique et formule des traces: Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini. Pour une variété X sur k, on peut considérer ses groupes de cohomologie à support compact $H^i_c(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$, qui sont des $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels munis d'une action continue de $Gal(\overline{k}/k) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$, c'est à dire muni d'un automorphisme (on choisira le Frobenius géométrique). Les valeurs propres du Frobenius opérant sur $H^i_c(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ sont des nombres de Weil relatif à q (i.e. sont des nombres algébriques α tel que pour tout plongement complexe on ait $|\alpha| = q^{\frac{n}{2}}$ pour un entier n). On notera $W(k)$ la catégorie abélienne des $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels de

dimension finie munis d'un automorphisme dont les valeurs propres sont des nombres de Weil (relatif à q). Cette catégorie est une catégorie tensorielle, et même Tannakienne. On considère alors $\Sigma_i(-1)^i[H^i_c(\overline{X},\mathbb{Q}_l)]$ qui est un objet dans l'anneau de Grothendieck $K(W(k))$. L'application

$$\mathcal{V}(k) \longrightarrow K(W(k))$$

qui à X associe $\Sigma_i(-1)^i[H^i_c(\overline{X},\mathbb{Q}_l)]$ se factorise en un morphisme d'anneaux

$$\chi_l : K(\mathcal{V}(k)) \longrightarrow K(W(k)).$$

De plus, $\chi_l(\mathbb{L}) = \mathbb{Q}_l(1)$, où $\mathbb{Q}_l(1)$ est de rang 1 et l'action du Frobenius est donnée par mutiplication par q (il s'agit donc d'un élément inversible). Par le théorème 3.10 on trouve ainsi un morphisme d'anneaux

$$\chi_l : K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow K(W(k))[\{[\mathbb{Q}_l(i)-1]^{-1}\}_{i>0}],$$

où $\mathbb{Q}_l(i)$ est de rang 1 et l'action du Frobenius est donnée par mutiplication par q^i.

Définition 3.21 *Pour un champ d'Artin spécial F,* la caractéristique d'Euler l-adique (à support compact) de F *est* $\chi_l(F) \in K(W(k))[\{(\mathbb{Q}_l(i)-1)^{-1}\}_{i>0}]$. *Elle sera notée* $\chi_l(F)$.

A tout objet V de $W(k)$, on peut associé la trace du Frobenius géométrique, ce qui donne un morphisme d'anneaux

$$Tr_{Fr} : K(W(k)) \longrightarrow \mathbb{Q}_l,$$

qui est tel que $Tr_{Fr}([\mathbb{Q}_l(1)]) = q$ et $Tr_{Fr}([\mathbb{Q}_l(i)-1]) = q^i - 1$ soient inversibles. On obtient ainsi un morphisme d'anneaux

$$Tr_{Fr} \circ \chi_l : K(\mathcal{CH}^{sp}(k)) \longrightarrow \mathbb{Q}_l.$$

La proposition suivante est une formule des traces pour les champs d'Artin spéciaux. C'est un cas particulier d'une formule beaucoup plus générale valable pour tout champ d'Artin fortement de présentation finie (voir [To-Va-Ve]).

Proposition 3.22 *Pour tout $F \in \mathcal{CH}^{sp}(k)$, on a*

$$Tr_{Fr}(\chi_l(F)) := \mu(F),$$

où $\mu(F)$ est le nombre de points rationels de F défini dans la proposition 3.5.

Preuve: D'après le corollaire 3.18 il suffit de voir que l'égalité

$$Tr_{Fr}(\chi_l(F)) := \mu(F)$$

est vraie lorsque F est une variété. Mais ceci n'est autre que la formule des traces de Grothendieck. □

Références

[Be] K. Behrend, *Derived l-adic categories for algebraic stacks*, Mem. Amer. Math. Soc. **163** (2003), no. 774, viii+93 pp.

[Bl] B. Blander, *Local projective model structure on simpicial presheaves*, K-theory **24** (2001) No. 3, 283-301.

[De-Ga] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques, Tome I*, Masson & Cie. Paris, North-Holland publishing company, 1970.

[D-L] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 201–232.

[G-S] H. Gillet, C. Soulé, *Descent, motives and K-theory*, J. Reine Angew. Math. **478** (1996), 127–176.

[La-Mo] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, A series of Modern Surveys in Mathematics vol. **39**, Springer-Verlag 2000.

[L-O] Y. Lazslo, M. Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks I,II*, Publ. Math. Inst. Hautes tudes Sci. No. 107 (2008), 109–168, 169–210.

[Si1] C. Simpson, *Algebraic (geometric) n-stacks*, pré-publication math.AG/9609014.

[Si2] C. Simpson, *The Hodge filtration on nonabelian cohomology*, in Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, 217–281, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Si3] C. Simpson, *Algebraic aspects of higher nonabelian Hodge theory*, in Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part II (Irvine, CA, 1998), 417–604, Int. Press Lect. Ser., 3, II, Int. Press, Somerville, MA, 2002.

[To1] B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1, 435–487, Proc. Sympos. Pure Math., **80**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[To2] B. Toën, *Derived Hall algebras*, Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 587–615.

[To3] B. Toën, *Descente fidèlement plate pour les n-champs d'Artin*, arXiv 0911.3554.

[To-Va] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **40** (2007), no. 3, 387–444.

[HAGI] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372.

[HAGII] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224 pp.

[To-Va-Ve] B. Toën, M. Vaquié, G. Vezzosi, *The l-adic formalism for higher stacks*, travail non plublié.