arXiv:math/0611546v3 [math.AT] 1 Jun 2010

Anneaux de définition des dg-algèbres propres et lisses

Bertrand Toën
Laboratoire Emile Picard
Université Paul Sabatier Toulouse 3, Bat 1R2
31 062 TOULOUSE cedex 9, France
e-mai:toen@math.ups-tlse.fr

Résumé

Soit $k = colim_i k_i$ une colimite filtrante d'anneaux commutatifs. On montre que la théorie homotopique des dg-algèbres propres et lisses sur k est la colimite des théories homotopiques des dg-algèbres propres et lisses sur les k_i. Nous en déduisons en particulier que toute dg-algèbre propre et lisse est définissable sur une $\mathbb{Z}$-algèbre commutative de type fini.

Abstract

Let $k = colim_i k_i$ be a filtered colimit of commutative rings. We show that the homotopy theory of smooth and proper dg-algebras over k is the colimit of the homotopy theories of smooth and proper dg-algebras over the k_i's. We deduce in particular that every smooth and proper dg-algebra can be defined over a commutative $\mathbb{Z}$-algebra of finite type.

Classification MSC: 16E45

Ce texte accompagne le travail [To1], et a pour objectif de démontrer une autre propriété de finitude spécifique aux dg-algèbres propres et lisses. Cette propriété de finitude affirme qu'une telle dg-algèbre sur une colimite filtrante d'anneaux commutatifs $A = colim A_i$ est toujours définissable sur un des A_i. En particulier, une dg-algèbre propre et lisse sur un anneau k est toujours définissable sur une $\mathbb{Z}$-algèbre commutative de type fini. Ceci répond positivement à la conjecture [Ka, 5.3], et permet d'appliquer des techniques de passage à la caractéristique positive pour l'étude des dg-algèbres propres et lisses (dont une application est l'étude de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, voir [Ka]).

Les résultats de ce travail sont dans la même lignée que ceux de [To1], bien qu'ils ne semblent ni découler de ceux-ci ni les impliquer directement. Tout comme nous l'avons mentioné dans [To1], ces résultats s'éclairent à la lumière de la théorie des champs (supérieurs et même dérivés, voir [To2]). Le théorème 1 démontré dans ce travail affirme en effet que le champs des dg-algèbres propres et lisses est localement de présentation finie. Ceci est un premier pas vers une preuve du fait que ce champ est un *D^--champ localement géométrique localement de*

présentation finie (dans la terminologie de [To-Va]). J'espère pouvoir revenir sur le caractére géométrique du champ des dg-algèbres propres et lisses dans un travail ultérieur, afin de mieux comprendre, et sans doute d'améliorer, les résultats de [To1].

Remerciements: Je tiens à remercier D. Kaledin pour de nombreuses conversations sur le sujet, et en particulier pour avoir remarquer que le sous-lemme 3 découlait formellement des arguments de la preuve du théorème principal. Je remercie aussi le rapporteur pour ses commentaires.

Nous renvoyons à [To1, To-Va, Ke, Ko-So] pour les notions de dg-algèbres propres, lisses et homotopiquement de présentation finie. Pour un anneau commutatif k nous noterons $Ho(k - dg - alg^{pl})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique des k-dg-algèbres formée des dg-algèbres propres et lisses sur k. Pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $k \longrightarrow k'$, on dispose d'un foncteur de changement de bases

$$- \otimes^{\mathbb{L}}_{k} k' : Ho(k - dg - alg) \longrightarrow Ho(k' - dg - alg).$$

Ce foncteur préserve les caractères propres, lisses, et homotopiquement de présentation finie des dg-algèbres. Avec ces notations, le théorème principal de ce travail est le suivant.

Théorème 1 *Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i\in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatif de colimite $k := colim_{i\in I} k_i$. Le foncteur naturel*

$$Colim_{i\in I} - \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k : Colim_{i\in I} Ho(k_i - dg - alg^{pl}) \longrightarrow Ho(k - dg - alg^{pl})$$

est une équivalence de catégories.

La preuve que nous donnons de ce théorème repose sur les faits connus suivants, tous démontrés dans [To-Va] à l'exception de F7 dont nous donnerons une preuve (voir le sous-lemme 3).

F1 Une dg-algèbre propre et lisse est homotopiquement de présentation finie (voir [To-Va, Cor. 2.13]).

F2 Une dg-algèbre homotopiquement de présentation finie est lisse (voir [To-Va, Prop. 2.14]).

F3 Une dg-algèbre est homotopiquement de présentation finie si et seulement si elle est quasi-isomorphe à un rétracte d'un complexe I-cellulaire fini (voir [To-Va, Prop. 2.2]).

F4 Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i\in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatifs de colimite $k := colim_{i\in I} k_i$. Soit A_i une k_i-dg-algèbre (pour un $i \in I$) et notons

$$A := A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq Colim_{j\in i/I} A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j.$$

Alors le foncteur naturel

$$Colim_{j\in i/I} - \otimes^{\mathbb{L}}_{k_j} k : Colim_{j\in i/I} D_{parf}(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j) \longrightarrow D_{parf}(A)$$

est une équivalence de catégories (voir [To-Va, Lem. 2.10]).

F5 Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i\in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatifs de colimite $k := colim_{i\in I} k_i$. Soit A_i une k_i-dg-algèbre (pour un $i \in I$) homotopiquement de présentation finie et notons

$$A := A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq Colim_{j\in i/I} A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j.$$

Nous noterons $D_{pspa}(A)$ (resp. $D(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j)$) la sous-catégorie pleine de $D(A)$ (resp. de $D_{pspa}(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j)$) formée des A-dg-modules (resp. des $A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j$-dg-modules) dont le complexe sous-jacent de k-modules (resp. de k_j-modules) est parfait. Alors le foncteur naturel

$$Colim_{j\in i/I} - \otimes^{\mathbb{L}}_{k_j} k : Colim_{j\in i/I} D_{pspa}(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j) \longrightarrow D_{pspa}(A)$$

est une équivalence de catégories. Ceci est une conséquence du caractère localement de présentation finie du champ $\mathcal{M}_T$ de [To-Va, Thm. 3.6] (pour $T = A_i$). Par soucis de clarté nous redonnerons une preuve de ce fait (voir le sous-lemme 7).

F6 Soit A une k-dg-algèbre lisse. Alors un A-dg-module E qui est parfait comme complexe de k-modules et aussi parfait comme A-dg-module (voir [To-Va, Lem. 2.8 (2)]). En d'autres termes on a $D_{pspa}(A) \subset D_{parf}(A)$.

F7 La catégorie homotopique $Ho(k - dg - alg)$ est Karoubienne. En d'autres termes, pour tout objet $A \in Ho(k - dg - alg)$ et tout endomorphisme idempotent p de A, il existe un objet B et deux morphismes $i : B \longrightarrow A$, $r : A \longrightarrow B$ tels que $ri = id$ et $ir = p$. Ce fait n'est pas une formalité car il est bien connu qu'il existe des catégories de modèles M telle que $Ho(M)$ ne soit pas Karoubienne (l'exemple le plus fameux est celui de la catégorie homotopique des espaces, voir par exemple [Fr-He]).

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. Nous commencerons par démontrer l'analogue du théorème 1 pour les dg-algèbres homotopiquement de présentation finie. Pour cela, nous noterons $Ho(k - dg - alg^{hpf})$ la sous-catégorie pleine de $Ho(k - dg - alg)$ formée des k-dg-algèbres homotopiquement de présentation finie (pour un anneau k).

Lemme 2 *Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i\in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatifs de colimite $k := colim_{i\in I} k_i$. Le foncteur naturel*

$$Colim_{i\in I} - \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k : Colim_{i\in I} Ho(k_i - dg - alg^{hpf}) \longrightarrow Ho(k - dg - alg^{hpf})$$

est une équivalence de catégories.

Preuve du lemme 2: Soient A_i et B_i deux objets de $Ho(k_i - dg - alg^{hpf})$ pour un objet $i \in I$. Notons

$$A := A \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \qquad B := B \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k.$$

Vue comme k_i-dg-algèbre (à travers le foncteur d'oubli), la dg-algèbre B s'écrit comme une colimite filtrante

$$B \simeq Colim_{j\in i/I} B \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j.$$

Ainsi, comme A est homotopiquement de présentation finie on trouve

$$[A, B]_{Ho(k-dg-alg)} \simeq [A_i, Colim_{j\in i/I} B \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j]_{Ho(k_i-dg-alg)}$$

$$\simeq Colim_{j\in i/I}[A_i, B\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j]_{Ho(k_i-dg-alg)} \simeq Colim_{j\in i/I}[A\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j, B\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j]_{Ho(k_j-dg-alg)}.$$

Ceci montre que le foncteur en question est pleinement fidèle.

Pour l'essentielle surjectivité nous allons utiliser F3 et F7. Soit $A \in Ho(k-dg-alg^{hpf})$. D'après F3 nous savons qu'il existe une k-dg-algèbre B qui est quasi-isomorphe à un complexe I-cellulaire fini, et deux morphismes

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{r} A,$$

tels que $r\circ i = id$ (dans $Ho(k-dg-alg^{hpf})$). Notons $p = i\circ r$, qui est un endomorphisme de B tel que $p^2 = p$ (toujours dans $Ho(k-dg-alg^{hpf})$).

Comme B est un complexe I-cellulaire fini, il est facile de voir que B est définie, à quasi-isomorphisme près, sur k_i pour $i \in I$. Soit donc B_i, une k_i-dg-algèbre, qui est aussi quasi-isomorphe à un complexe I-cellulaire fini, telle que $B_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq B$ dans $Ho(k-dg-alg)$. On peut donc écrire

$$B \simeq Colim_{j\in i/I} B_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j.$$

Comme B est un complexe I-cellulaire fini c'est un objet homotopiquement de présentation finie. On a donc,

$$[B,B]_{Ho(k-dg-alg)} \simeq Colim_{j\in i/I}[B_i\otimes_{k_i} k_j, B_i\otimes_{k_i} k_j]_{Ho(k_j-dg-alg)}.$$

Ainsi, quitte à remplacer l'objet i par un objet $j \in i/I$, on peut supposer qu'il existe p_i un endomorphisme de B_i dans $Ho(k_i-dg-alg)$, tel que

$$p_i^2 = p_i \qquad p_i\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k = p.$$

Nous invoquons ici le fait F7, qui découle du sous-lemme plus général suivant (en prenant $M = k-dg-alg$, et $\Pi := H^*$ le foncteur de cohomologie totale).

Sous-lemme 3 *Soit M une catégorie de modèles munie d'un foncteur $\Pi : M \longrightarrow Ens$ vérifiant les propriétés suivantes.*

1. *Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ est une équivalence si et seulement si le morphisme induit $\Pi(f) : \Pi(A) \longrightarrow \Pi(B)$ est un isomorphisme.*

2. *Le foncteur Π commute aux colimites filtrantes.*

Alors la catégorie $Ho(M)$ est Karoubienne.

Avant de donner la preuve du sous-lemme précédent montrons comment il permet de conclure la preuve du lemme 2. On choisit un objet A_i dans $Ho(k_i-dg-alg)$ ainsi que deux morphismes $i_i : A_i \longrightarrow B_i$ et $r_i : B_i \longrightarrow A_i$ avec $i_ir_i = p_i$ et $r_ii_i = id$. Alors $A_i\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k$ et A sont isomorphes dans $Ho(k-dg-alg)$. En effet, cela se déduit de l'unicité de la décomposition d'un endomorphisme idempotent. Plus précisèmment, on considère les deux morphismes

$$A_i\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \xrightarrow{i_i\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k} B_i\otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq B \xrightarrow{r} A$$

$$A \xrightarrow{i} B \simeq B_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \xrightarrow{r_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k} A_i.$$

Il est facile de vérifier que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre.

Preuve du sous-lemme 3: Soit B un objet de M et p un endomorphisme idempotent de B dans $Ho(M)$. On peut supposer que B est un objet cofibrant et fibrant et donc représenter p par un morphisme $e : B \longrightarrow B$ dans M. Nous définissons alors un objet

$$A := Colim(\ B \xrightarrow{e} B \xrightarrow{e} \cdots,\ )$$

qui est la composition transfinie dénombrable du morphisme e.

Nous allons maintenant construire deux morphismes naturels

$$i : A \longrightarrow B \qquad r : B \longrightarrow A,$$

et vérifier que $ir = p$ et $ri = id$. Pour cela, notons $\mathbb{N}$ la catégorie associée à l'ensemble ordoné des entiers naturels. Nous disposons de la catégorie des $\mathbb{N}$-diagrammes $M^{\mathbb{N}}$. Cette catégorie est elle même une catégorie de modèle pour la structure de Reedy (voir par exemple [Ho]), pour laquelle les fibrations et équivalences sont définies termes à termes. Nous diposons d'un foncteur naturel

$$Ho(M^{\mathbb{N}}) \longrightarrow Ho(M)^{\mathbb{N}}$$

de la catégorie homotopique des $\mathbb{N}$-diagrammes dans M vers celle des $\mathbb{N}$-diagrammes dans $Ho(M)$.

Sous-sous-lemme 4 *Le foncteur ci-dessus*

$$Ho(M^{\mathbb{N}}) \longrightarrow Ho(M)^{\mathbb{N}}$$

est plein.

Preuve du sous-sous-lemme 4: Soient

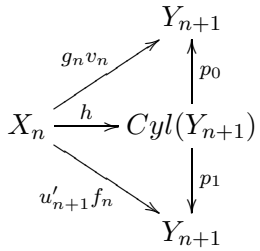
$$X := (\ X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \qquad X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \longrightarrow \cdots\ )$$

$$Y := (\ Y_0 \xrightarrow{g_0} Y_1 \xrightarrow{g_1} \cdots \qquad Y_n \xrightarrow{g_n} Y_{n+1} \longrightarrow \cdots\ )$$

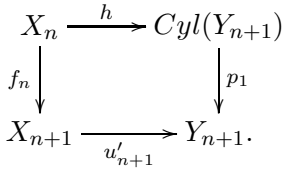
deux $\mathbb{N}$-diagrammes dans $Ho(M^{\mathbb{N}})$. On supposera X cofibrant et Y fibrant. Cela signifie que chaque Y_n est fibrant dans M, et que chaque morphisme $f_n : X_n \to X_{n+1}$ est une cofibration entre objets cofibrants.

Soit $u : X \to Y$ un morphisme dans $Ho(M)^{\mathbb{N}}$. Le morphisme u est donné par des morphismes $u_n \in [X_n, Y_n]$ dans $Ho(M)$, tels que pour tout n on ait $g_n u_n = u_{n+1} f_n$ dans $Ho(M)$. Comme X_n est cofibrant et Y_n est fibrant, on peut choisir un représentant $u'_n : X_n \longrightarrow Y_n$ dans M. L'égalité précédente implique alors que les deux morphismes $g_n u'_n$ et $u'_{n+1} f_n$ sont homotopes. Par récurrence sur n, nous allons construire des morphismes $v_n : X_n \longrightarrow Y_n$, qui sont homotopes

aux u'_n, et tels que $g_n v_n = v_{n+1} f_n$ dans M. Supposons que de tels morphismes v_i soient construits pour $i \leq n$. On choisit une homotopie



où $Cyl(Y_n)$ est un objet cylindre pour Y_{n+1} (voir [Ho]). On considère le diagramme suivant



Le morphisme p_1 étant une fibration triviale on peut choisir un relèvement $k : X_{n+1} \longrightarrow Cyl(Y_{n+1})$ de h (qui fasse commuter les deux triangles possibles). On pose

$$v_{n+1} := p_0 k : X_{n+1} \longrightarrow Y_{n+1}.$$

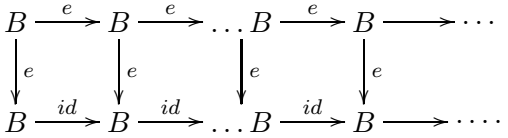
Par construction, v_{n+1} est homotope à u'_{n+1} (car k est une homotopie), et $v_{n+1} f_n = g_n v_n$. Les morphismes v_n définissent alors un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans $M^{\mathbb{N}}$, dont l'image dans $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ est le morphisme u que l'on s'est donné. □

Revenons maintenant à la preuve du sous-lemme 3. On considère deux objets

$$X := (\ B \xrightarrow{e} B \xrightarrow{e} \dots B \xrightarrow{e} B \longrightarrow \cdots\ )$$

$$Y := (\ B \xrightarrow{id} B \xrightarrow{id} \dots B \xrightarrow{id} B \longrightarrow \cdots\ )$$

dans $Ho(M^{\mathbb{N}})$. On dispose d'un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ défini par $u_n := e$ pour tout n



Par le sous-sous-lemme 4 ce morphisme se relève en un morphisme $i' : X \longrightarrow Y$ dans $Ho(M^{\mathbb{N}})$. De même, on dispose d'un morphisme $Y \longrightarrow X$ dans $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ en posant $u_n := e$ pour tout n. Ce morphisme se relève en un morphisme $r' : Y \longrightarrow X$ dans $Ho(M^{\mathbb{N}})$. Finalement, en appliquant le foncteur (notons que les propriétés (1) et (2) du sous-lemme 3 impliquent que les colimites filtrantes présèrvent les équivalences dans M)

$$Colim_{\mathbb{N}} : Ho(M)^{\mathbb{N}} \longrightarrow Ho(M)$$

on trouve nos deux morphismes i et r dans $Ho(M)$

$$i := colim(i') : A \simeq colim(X) \longrightarrow B \simeq colim(Y)$$

$$r := colim(r') : B \simeq colim(Y) \longrightarrow A \simeq colim(X).$$

Considérons maintenant $u : r \circ i : A \longrightarrow A$ dans $Ho(M)$. Cet endomorphisme induit un morphisme

$$\Pi(u) : \Pi(A) \longrightarrow \Pi(A).$$

Comme Π commute aux colimites filtrantes $\Pi(u)$ est égal au morphisme composé

$$Colim(\ \Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \cdots,\ ) \longrightarrow Colim(\ \Pi(B) \xrightarrow{id} \Pi(B) \xrightarrow{id} \cdots,\ )$$

$$\longrightarrow Colim(\ \Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \cdots,\ )$$

tous deux induits par $\Pi(e)$ composantes par composantes. Enfin, comme $\Pi(e)$ est un endomorphisme idempotent de $\Pi(B)$ il n'est pas difficile de voir que $\Pi(u) = id$. Ceci implique en particulier que u est un automorphisme de A dans $Ho(M)$.

Pour conclure, on remarque que par construction nous avons $i \circ r = p$ (dans $Ho(M)$), comme on peut le voir en considérant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sim} & Colim(Y) \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ B & \longrightarrow & Colim(X) \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B & \xrightarrow{\sim} & Colim(Y). \end{array}$$

Ainsi, on a

$$u^3 = r \circ p^2 \circ i = r \circ p \circ i = u^2.$$

Comme nous avons vu que $u = r \circ i$ est un automorphisme cela implique que $r \circ i = id$. □

Ceci termine la preuve du lemme 2. □

Un corollaire immédiat du lemme 2 est le résultat suivant.

Corollaire 5 *Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i \in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatifs de colimite $k := colim_{i \in I} k_i$. Le foncteur naturel*

$$Colim_{i \in I} - \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k : Colim_{i \in I} Ho(k_i - dg - alg^{pl}) \longrightarrow Ho(k - dg - alg^{pl})$$

est pleinement fidèle

Preuve: Cela se déduit formellement de F1 et du lemme 2. □

Lemme 6 *Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i\in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatifs de colimite $k := colim_{i\in I} k_i$. Soit A_i une k_i-dg-algèbre homotopiquement de présentation finie pour un $i \in I$. Si $A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k$ est une k-dg-algèbre propre, alors il existe $j \in i/I$ tel que $A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j$ soit une k_j-dg-algèbre propre.*

Preuve: Soit $A := A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k$. On considère la A-dg-module parfait $A \in D_{parf}(A)$. Nous souhaitons alors utiliser le fait F5 afin de montrer que ce dg-module est défini sur A_j pour un $j \in i/I$. Avant cela nous redémontrerons ce fait dans le sous-lemme suivant.

Sous-lemme 7 *Soit I une catégorie filtrante et $\{k_i\}_{i\in I}$ un I-diagramme d'anneaux commutatifs de colimite $k := colim_{i\in I} k_i$. Soit A_i une k_i-dg-algèbre (pour un $i \in I$) homotopiquement de présentation finie et notons*

$$A := A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq Colim_{j\in i/I} A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j.$$

Alors le foncteur naturel

$$Colim_{j\in i/I} - \otimes^{\mathbb{L}}_{k_j} k : Colim_{j\in i/I} D_{pspa}(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j) \longrightarrow D_{pspa}(A)$$

est une équivalence de catégories.

Preuve du sous-lemme: La pleine fidèlité du foncteur en question se déduit aisèmment des faits F2, F4 et F6. Il nous faut montrer l'essentielle surjectivité. Pour cela, soit $E \in D_{pspa}(A)$. Nous pouvons bien entendu supposer que A est une dg-algèbre cofibrante, et que E est un A-dg-module cofibrant. Ceci implique en particulier que le complexe sous-jacent à E, que nous noterons M, est un objet cofibrant dans la catégorie de modèles des complexes de k-modules. Le A-dg-module E est alors determiné (voir par exemple [To-Va, Lem. 3.14]) par la classe d'isomorphisme de l'objet $M \in D_{parf}(k)$, et par le morphisme $A \longrightarrow \underline{End}(M)$ dans $Ho(k - dg - alg)$, où $\underline{End}(M)$ est la k-dg-algèbre des endomorphismes du complexe M. Comme M est un complexe parfait, la propriété F4 (appliquée à $A = k$) implique qu'il existe $j \in i/I$ et $M_j \in D_{parf}(k_j)$ tel que $M_j \otimes^{\mathbb{L}}_{k_j} k \simeq M$. Nous pouvons supposer que $i = j$. Dans ce cas, on a un isomorphisme dans $Ho(k_i - dg - alg)$

$$\underline{End}(M) \simeq Colim_{j\in i/I} \underline{End}(M_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j)$$

(en supposant que M_i a été choisi cofibrant). Comme A_i est homotopiquement de présentation finie, cela implique que le morphisme

$$A_i \longrightarrow \underline{End}(M)$$

se factorise dans $Ho(k_i - dg - alg)$ par un morphisme

$$A_i \longrightarrow \underline{End}(M_j).$$

Ce morphisme induit un morphisme dans $Ho(k_j - dg - alg)$

$$A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j \longrightarrow \underline{End}(M_j).$$

Ce dernier morphisme determine un $A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j$-dg-module $E_j \in D(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j)$ qui par construction est tel que $E_j \otimes^{\mathbb{L}}_{k_j} k \simeq E$. Comme E_j est parfait comme complexe de k_j-module, ceci montre l'essentielle surjectivité du foncteur en question. □

Nous revenons maintenant à la preuve du lemme 6. Par hypothèse de propreté sur A, le A-dg-module A est parfait comme complexe de k-modules, et d'après le sous-lemme 7, quitte à remplacer i par un $j \in i/I$, on peut supposer qu'il existe $E_i \in D_{pspa}(A_i)$ tel que $E_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq A$ dans $D(A)$. Or A_i est homotopiquement de présentation finie et donc lisse d'après F2. En particulier, F6 implique que E_i est un A_i-dg-module parfait. Ainsi, E_i et A_i sont deux A_i-dg-modules parfaits qui deviennent quasi-isomorphes après extension des scalaires à k. La propriété F4 implique donc qu'il existe $j \in i/I$ tel que $E_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j \simeq A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j$ dans $D(A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j)$. Cela a comme conséquence que $A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j$ est un complexe parfait de k_j-modules, et donc est une k_j-dg-algèbre propre. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 1. D'après 5 le foncteur en question est pleinement fidèle. Soit alors A une k-dg-algèbre propre et lisse. D'après 6, il existe $i \in I$ et une k_i-dg-algèbre homotopiquement de présentation finie A_i avec $A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k \simeq A$. Le lemme 6 nous dit alors qu'il existe $j \in i/I$ tel que $A_j := A_i \otimes^{\mathbb{L}}_{k_i} k_j$ soit une k_j-dg-algèbre propre et lisse avec $A_j \otimes^{\mathbb{L}}_{k_j} k$ quasi-isomorphe à A. Ceci montre que le foncteur en question dans le théorème 1 est essentiellement surjectif, et démontre donc ce théorème en vu du corollaire 8.

Une conséquence immédiate du théorème 1 est la corollaire suivant, qui est une réponse positive à la conjecture [Ka, 5.3].

Corollaire 8 *Soit k un anneau commutatif et A une k-dg-algèbre propre et lisse. Alors il existe un anneau commutatif k_0, de type fini sur $\mathbb{Z}$, un morphisme $k_0 \longrightarrow k$, et une k_0-dg-algèbre propre et lisse A_0 telle que*

$$A_0 \otimes^{\mathbb{L}}_{k_0} k \simeq A.$$

Preuve: On écrit k comme une colimite filtrante de sous-anneaux de type fini sur $\mathbb{Z}$, et on applique le théorème 1. □

Références

[Fr-He] P. Freyd, A. Heller, *Splitting homotopy idempotents II*, J. Pure and Appl. Algebra **89** (1993), No. 1-2, 93-106.

[Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[Ka] D. Kaledin, *Non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration via the method of Deligne-Illusie*, pré-publication math.KT/0611623.

[Ke] B. Keller, *On differential graded categories*, pré-publication accessible à http://www.math.jussieu.fr/ keller/publ/index.html

[Ko-So] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Notes on A-infinity algebras, A-infinity categories and non-commutative geometry*, pré-publication math.RA/060624.

[To1] B. Toën, *Finitude homotopique des dg-algèbres propres et lisses*, pré-publication math.AT/0609762.

[To2] B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, pré-publication math.AG/0604504.

[To-Va] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **40** (2007), 387-444.